Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ

Лекции по математике для аспирантов

проф. В. А. Артамонов

Оглавление

Глава 1

Линейная алгебра

1. Линейные уравнения, матрицы и определители

1.1. Системы линейных уравнений. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{cases} \qquad (1)$$

коэффициенты которой a_{ij}, b_j заданы. Наша цель – найти все решения и указать алгоритм для нахождения всех решений.

Определение 1.1. *Решением* системы (1) называется такой набор чисел $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, что для всех $i = 1, \dots, m$ выполнены равенства

$$a_{i1}\alpha_1 + \cdots + a_{in}\alpha_n = b_i.$$

Мы будем совершать ряд простейших преобразований системы (1), сохраняющих множества решений. Заметим, что все информация о системе (1) содержится в ее таблице ее коэффициентов.

Определение 1.2. *Матрицей* системы (1) называется прямоугольная таблица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Расширенной матрицей системы линейных уравнений (1) называется прямоугольная таблица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Иногда расширенную матрицу системы (1) обозначают через

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Определение 1.3. Следующие преобразования системы (1) (ее (расширенной) матрицы) называются *элементарными*:

$\diamondsuit$ прибавление к одному уравнению (строке) другого уравнения (другой строки), умноженного(ой) на произвольное число;

$\heartsuit$ умножение уравнение (строки) на ненулевое число.

Теорема 1.4. *При элементарных преобразованиях переходим к эквивалентной системе.*

Упражнение 1.5. Доказать, что совершая элементарные преобразования со строками матрицы можно в ней переставить любые две строки.

Будем приводить матрицу системы к наиболее простому – ступенчатому виду.

Определение 1.6. Матрица (3) называется *ступенчатой*, если

1. ниже нулевой строки расположены только нулевые строки;

2. первый ненулевой каждой строки равен 1;

3. если первый ненулевой i-ой строки расположен на месте (i, k_i), то

  a. $k_{i+1} > k_i$;

  b. все элементы $a_{j,k_i} = 0$ для всех $j \neq i$.

Теорема 1.7. *Каждая матрица конечным числом элементарных преобразований строк приводится к ступенчатому виду.*

Определение 1.8. Пусть матрица системы (1) имеет ступенчатый вид. Назовем неизвестную x_i *главной*, если в некотором уравнении все коэффициенты при $x_1, \ldots, x_{i-1}$ равны нуля, а коэффициент при x_i отличен от нуля (и потому равен 1). все остальные неизвестные назовем *свободными*.

Применим теоремы теоремы 1.4, 1.7 к исследованию системы (1). В силу указанных теорем можно считать, что расширенная матрица системы (1) имеет ступенчатый вид.

Пусть ее последняя ненулевая строка имеет вид

$$(0, \ldots, 0, 1). \tag{4}$$

Это означает, что системы (1) содержит уравнение

$$0x_1 + \cdots + 0x_n = 1,$$

что невозможно. Следовательно, в этом случае система не имеет решений.

Пусть в A нет строки (4). Предположим для простоты, что система имеет вид

$$\begin{cases} x_1 & & & +a_{1,r+1}x_{r+1} & + \cdots + & a_{1n}x_n & = b_1 \\ & x_2 & & +a_{2,r+1}x_{r+1} & + \cdots + & a_{2n}x_n & = b_2 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ & & x_r & +a_{r,r+1}x_{r+1} & + \cdots + & a_{rn}x_n & = b_r \end{cases} \tag{5}$$

Перенося переменные $x_{r+1}, \dots, x_n$ в правую часть, получаем

$$\begin{cases} x_1 &= & b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ x_2 &= & b_2 - a_{2,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r &= & b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n. \end{cases} \tag{6}$$

Таким образом, придавая неизвестным $x_{r+1}, \dots, x_n$ произвольные значения, мы однозначно находим значения неизвестных $x_1, \dots, x_r$. Итак, система имеет решение, и, если $r < n$, то система имеет бесконечно много решений. Если $r = n$, то система имеет единственное решение.

Определение 1.9. Система (1) *однородна*, если все ее свободные члены нулевые, т. е. $b_1 = \dots = b_m = 0$.

Предложение 1.10. *Если в однородной системе число неизвестных n больше числа уравнений m, то система неопределенна.*

Пример 1. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 & - & 4x_2 & - & x_3 & = & -2 \\ 3x_1 & - & 6x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -3 \end{cases}$$

Составим матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 & -2 \\ 3 & -6 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Для приведения к ступенчатому виду поменяем в матрице местами первую и третью строки

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & -4 & -1 & -2 \\ 3 & -6 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Вычтем из второй строки первую, умноженную на 2, в их третьей строки – первую, умноженную на 3. Получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -3 & 4 \\ 0 & -3 & -1 & 13 \end{pmatrix}.$$

Из второй строки вычтем третью. Получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -9 \\ 0 & -3 & -1 & 13 \end{pmatrix}.$$

К первой строке прибавим вторую, а к третьей – прибавим вторую, умноженную на 3. Получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -12 \\ 0 & 1 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & -7 & -14 \end{pmatrix}.$$

Делим последнюю строку на -7 и получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -12 \\ 0 & 1 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

К первой строек прибавляем последнюю, а ко второй – последнюю, умноженную на 2. Получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Запишем систему, соответствующую полученной матрице

$$\begin{cases} x_1 & & & = & -10 \\ & x_2 & & = & -5 \\ & & x_3 & = & 2 \end{cases}$$

Пример 2. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 & - & 4x_2 & - & x_3 & = & -2 \\ 3x_1 & - & 6x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \end{cases}$$

Составим матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 & -2 \\ 3 & -6 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Для приведения к ступенчатому виду вычтем из второй строки первую

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Поменяем местами две строки

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & -4 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Из второй строки вычтем первую, умноженную на 2

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -7 & -14 \end{pmatrix}.$$

Разделим вторую строку на -7

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Из первой строки вычтем первую, умноженную на 3

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Получился ступенчатый вид. Соответствующая система линейных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} x_1 & - & x_2 & & = & 0 \\ & & & x_3 & = & 2 \end{cases}$$

Таким образом, главными переменными являются x_1, x_3. Переменная X_2 – свободная, и решениями являются

$$\begin{cases} x_1 & = & x_2 \\ x_3 & = & 2 \end{cases}$$

1.1.1. **Упражнения.** Решить системы линейных уравнений

1) $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} -9x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 10x_4 = 3, \\ -6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ -3x_1 + 2x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} -9x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7, \\ -4x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 7x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 15, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12. \end{cases}$

1.2. Операции над матрицами.

Определение 1.11. $\mathrm{Mat}(n \times m)$ – всех матриц (прямоугольных таблиц) с n строками и m столбцами. Если $A \in \mathrm{Mat}(n \times m)$, то мы будем также писать $A = A_{n\times m}$. Если $A_{n\times m} = (a_{ij})$, $B_{n\times m} = (b_{ij})$, то полагаем $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$. Кроме того, $\lambda A_{n\times m} = (\lambda a_{ij})$.

Предложение 1.12. *Пусть $A, B, C \in \mathrm{Mat}(n\times m)$ и λ, ν – числа. Тогда справедливы следующие 8 аксиом векторного пространства:*

1. *$A+B=B+A$;*
2. *$A+(B+C)=(A+B)+C$;*
3. *если 0 – нулевая матрица (все ее коэффициенты равны нулю), то $A+0=A$ для любой матрицы A;*
4. *для любой матрицы A существует такая матрица $-A$, что $A+(-A)=0$;*
5. *$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$;*
6. *$(\lambda+\nu)A=\lambda A+\nu A$;*
7. *$(\lambda\nu)A=\lambda(\nu A)$;*
8. *$1A=A$.*

Определение 1.13. Пусть $A_{n\times m}=(a_{ij})$, $C_{m\times k}=(c_{st})$. Тогда $D=AC\in \mathrm{Mat}(n\times k)=(d_{is})$, где

$$d_{is}=a_{i1}d_{1s}+\dots+a_{in}d_{ns} \tag{7}$$

для всех $i=1,\dots,n, \quad s=1,\dots,k$.

Пример 1.14.

$$\begin{pmatrix}-2 & 3 & 5\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix}.$$

Операция умножения матриц используется в (36) при дифференцировании сложной функции.

Предложение 1.15. *Умножение матриц ассоциативно, т.е. $(AC)F=A(CF)$ для любых матриц*

$$A\in \mathrm{Mat}(n\times m), \quad C\in \mathrm{Mat}(m\times k), \quad F\in \mathrm{Mat}(k\times l).$$

Предложение 1.16. *Справедливы равенства:*

1. *$\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$.*
2. *$A(B+C)=AB+AC, \quad (A+U)V=AV+UV$.*

Определение 1.17. *Символ Кронекера* δ_{ij} равен 1, если $i=j$, и 0, если $i\neq j$. *Единичная* матрица $E=E_n\in \mathrm{Mat}(n)$ – это матрица, в которой на месте (i,j) стоит символ Кронекера δ_{ij}.

Предложение 1.18. *Пусть $A\in \mathrm{Mat}(n\times m)$. Тогда $E_nA=A=AE_m$.*

Определение 1.19. Пусть $A\in \mathrm{Mat}(n\times m)$. Тогда *транспонированная* матрица ${}^tA=A^*\in \mathrm{Mat}(m\times n)$ – это матрица, в которой на месте (i,j) стоит элемент a_{ji} матрицы A.

Предложение 1.20. ${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB, \quad {}^t(\lambda A)=\lambda{}^tA, \quad {}^t(AC)={}^tC{}^tA$.

В терминах матричного умножения удобно записывать системы линейных уравнений. Именно, системы (1) имеет вид $AX = b$, где A – матрица (2) системы (1),

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

соответственно, столбец неизвестных и столбец свободных членов.

Определение 1.21. Пусть $A \in \mathrm{Mat}(n)$. Матрица $A^{-1} \in \mathrm{Mat}(n)$ называется *обратной* к A, если $AA^{-1} = A^{-1}A = E_n$.

Предложение 1.22. *Если A^{-1} существует, то она единственна.*

Вычисление обратной матрицы с помощью элементарных преобразований. Составим расширенную матрицу $(A \mid E)$ и приведем ее к ступенчатому виду $(E \mid A^{-1})$. Пример – вычисления A^{-1}, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to$$
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right).$$

Отсюда

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

1.2.1. **Упражнения.**

1. Выполнить действия с матрицами:

a. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix};$

b. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix};$

c.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & -3 \\ 5 & -2 & 8 \end{pmatrix};$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 \\ 2 & 9 & -7 \\ 13 & -9 & 15 \end{pmatrix}$$

d.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -4 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & -5 & -2 \\ 2 & -2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 4 & 5 & 11 \\ 6 & 4 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Решить матричные уравнения:

a. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

b. $X \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -24 & -7 \end{pmatrix};$

c. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

d. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix};$

e. $X \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad = \begin{pmatrix} -3 & -\frac{2}{5} & \frac{7}{5} \\ -1 & \frac{18}{5} & \frac{8}{5} \\ 1 & \frac{9}{5} & -\frac{14}{5} \end{pmatrix}.$

1.3. Определители.

Определение 1.23. Пусть задана квадратная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{8}$$

Определителем или *детерминантом* $\det A = |A|$ называется функция, сопоставляющая каждой квадратной матрице число, причем выполнены следующие свойства:

1. при элементарных преобразованиях строк типа $\heartsuit$ из § 1.1 определитель матрицы умножается на указанное число;

2. при элементарных преобразованиях $\diamondsuit$ из § 1.1 определитель не меняется;

3.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

Теорема 1.24. *Определитель для каждой матрицы существует и единственный.*

Пример

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Вычисление определителей путем приведения к диагональному виду.

Теорема 1.25. *Свойства определителей:*

1. *если в определителе две строки (столбца) равны, то определитель равен нулю, если в определителе переставить две строки (столбца), то он изменит знак;*
2. $|{}^tA| = |A|$;
3. $|AB| = |A||B|$;
4. *определитель с углом нулей*
$$\left|\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right| = |A||C|;$$
5. *разложение определителя по строке (столбцу)*
$$|A| = a_{i1}A_{i1} + \dots + a_{in}A_{in}, \quad A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}.$$

Здесь M_{ij} – определитель матрицы размера $n-1$, получающейся из матрицы A вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.

Число M_{ij} называется *минором* матрицы A, а число A_{ij} – *алгебраическим дополнением* элемента a_{ij} матрицы A.

Предложение 1.26 (Теорема о фальшивом разложении). *Если $i \neq j$, то*

$$a_{i1}A_{j1} + \dots + a_{in}A_{jn} = 0.$$

Пример 1.27. Вычисление определителя третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Теорема 1.28 (Теорема Крамера). *Пусть задана квадратная система линейных уравнений $AX = b$. Если определитель $|A| \neq 0$, то система имеет единственной решение, где*

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|},$$

где матрица A_i получается из матрицы A заменой i-го столбца столбцом свободных членов.

Пример 1.29. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 & + & x_2 = & -1 \\ 3x_1 & - & x_2 = & 5 \end{cases}$$

Имеем

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5, \quad |A_1| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -4, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 13.$$

Отсюда

$$x_1 = \frac{-4}{-5} = \frac{4}{5}, \quad x_2 = \frac{13}{-5} = -\frac{13}{5}.$$

Теорема 1.30. *Пусть $A \in \mathrm{Mat}(n)$. Обратная матрица A^{-1} существует тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$. В матрице A^{-1} на месте (i, j) стоит число*

$$b_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A}.$$

Пример 1.31.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

1.3.1. **Упражнения.**

1. Вычислить определители:

a. $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$;

b. $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$;

c. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$; $\quad = -8$

d. $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$;

e. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 2 \end{vmatrix}$; $\quad = 525$

f. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & -8 & 2 \end{vmatrix}$; $\quad 87$

g. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;

h. $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 9 \end{vmatrix}$.

2. Вычислить обратные матрицы:

a. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$

b. $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$

c. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}^{-1}$; $\quad = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ -27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$;

d. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$

e. $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$

f. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$.

3. Решить систему уравнений по правилу Крамера:

a. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1, \\ x_1 + 16x_2 = 17; \end{cases}$ $\quad (1, 1)$;

b. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 1, \\ 3x_1 + 7x_2 = 2; \end{cases}$ $\quad \left(\frac{9}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right)$;

c. $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=3, \\ x_1+2x_2+x_3=0, \\ x_1+x_2+2x_3=0; \end{cases}$

d. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=6, \\ -x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1-x_2+x_3=2; \end{cases}$

e. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+5x_3=10, \\ 3x_1+7x_2+4x_3=3, \\ x_1+2x_2+2x_3=3; \end{cases} \quad x_1=3.$

2. Линейные пространства, линейное программирование

2.1. Линейные пространства. Пространство векторов (точек) $\mathbb{R}^n$ состоит из множества точек

$$x=(x_1,\,\dots,\,x_n), \quad x_i\in\mathbb{R}. \tag{9}$$

Сложение векторов и умножением вектора на число производится покоординатно. *Длина* $\|x\|$ вектора x из (9) определяется как

$$\|x\|=\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}.$$

Расстояние между векторами

$$x=(x_1,\,\dots,\,x_n), \quad y=(y_1,\,\dots,\,y_n) \tag{10}$$

определяется как $\|x-y\|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\dots+(x_n-y_n)^2}$. *$n$-мерная окрестность* точки x из (35) определяется как шар

$$U_\varepsilon=\{y\in\mathbb{R}^n \mid \|y-x\|<\varepsilon\}.$$

Векторы

$$a_1,\,\dots,\,a_m\in\mathbb{R}^n \tag{11}$$

линейно зависимы, если существуют такие числа $\lambda_1,\dots,\lambda_m$, не все равные нулю, что

$$\lambda_1a_1+\dots+\lambda_ma_m=0. \tag{12}$$

Если из условия (12) вытекает $\lambda_1=\dots=\lambda_m=0$, то система векторов (11) называется *независимой*. Система векторов (11) составляет базис $\mathbb{R}^n$, если она независима и любой вектор из $x\in\mathbb{R}^n$ представляется в виде линейной комбинации $x=\alpha_1a_1+\dots+\alpha_ma_m$.

Теорема 1.32. *Если векторы* (11) *составляют базис* $\mathbb{R}^n$*, то* $n=m$*. Если векторы из* (11)*, где* $n=m$*, имеют вид*

$$a_i=(a_{i1},\,\dots,\,a_{in})\in\mathbb{R}^n, \quad 1\leqslant i\leqslant n,$$

то они составляют базис тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Определение 1.33. Непустое подмножество L в $\mathbb{R}^n$ называется *подпространством*, если из того, что $x, y \in L$ следует, что $x + y, \alpha x \in L$.

Примером подпространства U в пространстве V является *линейная оболочка* $\langle a_1, \dots, a_k \rangle$ системы векторов $a_1, \dots, a_k \in V$, состоящие из всех линейных комбинаций $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k$.

Можно говорить о базисе подпространства. *Размерность* $\dim L$ подпространства L – число векторов в базисе. Всегда $\dim L \leqslant n$. Если $\dim L = n$, то $L = \mathbb{R}^n$.

Предположим, что задана система векторов (11). Требуется среди этих векторов найти максимальную линейно независимую подсистему, а все остальные векторы выразить через эту систему. Для этого создадим матрицу A размера $m \times n$, столбцами которой будут координаты векторов (11). Например, если заданы векторы

$$a_1 = (-1, 3, 2), \quad a_2 = (2, -1, 3), \quad a_3 = (0, 5, 7), \quad a_4 = (-3, 4, -2),$$

то

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

Далее приводим матрицу A к ступенчатому виду. В нашем примере

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 7 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 5 & -5 \\ 0 & 7 & 7 & -8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & 7 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выделим номера столбцов, в которых стоят первые ненулевые элементы строк. В нашем случае – это первый, второй и четвертый столбцы. Тогда максимальную независимую систему образуют векторы a_1, a_2, a_4. Вектор a_3 линейно выражается через a_1, a_2, a_4. Коэффициенты разложения указаны в третьем столбце приведенной матрицы, именно, $a_3 = 2a_1 + a_2$.

2.1.1. **Упражнения.** Найти базис системы векторов и выразить через этот базис векторы остальные векторы системы:

1. $a_1 = (5, 2, -3, 1), \quad a_2 = (4, 1, -2, 3), \quad a_3 = (1, 1, -1, -2),$
$a_4 = (3, 4, -1, 2), \quad a_5 = (7, -6, -7, 0);$

2. $a_1 = (2, -1, 3, 5), \quad a_2 = (4, -3, 1, 3), \quad a_3 = (3, -2, 3, 4),$
$a_4 = (4, -1, -15, 17);$

3. $a_1 = (1,2,3,-4)$, $a_2 = (2,3,-4,1)$, $a_3 = (2,-5,8,-3)$, $a_4 = (5,26,-9,-12)$, $a_5 = (3,-4,1,2)$;

4. $a_1 = (2,3,-4,-1)$, $a_2 = (1,-2,1,3)$, $a_3 = (5,-3,-1,8)$, $a_4 = (3,8,-9,-5)$;

5. $a_1 = (2,2,7,-1)$, $a_2 = (3,-1,2,4)$, $a_3 = (1,1,3,1)$;

6. $a_1 = (2,1)$, $a_2 = (3,2)$, $a_3 = (1,1)$, $a_4 = (2,3)$.

2.2. Плоскости.

Определение 1.34. Пусть U – подпространство в $\mathbb{R}^n$, и $a \in \mathbb{R}^n$. *Плоскостью* Π в $\mathbb{R}^n$, проходящей через точку a с *направляющим* подпространством U называется множество всех векторов (точек) вида $\Pi = a + U = \{a + u \mid u \in U\}$. Если U – направляющее подпространство для плоскости Π, то $U = \{x - y \mid x, y \in \Pi\}$. В частности, U по Π определено однозначно. *Размерностью* плоскости называется размерность его направляющего пространства.

Теорема 1.35. *Предположим, что задана совместная систем линейных уравнений $AX = b$. Все ее решения образуют плоскость* Π. *Его направляющее пространство состоит из всех решений однородной системы $AY = 0$.*

Обратно, любая плоскость $\Pi = a + U$ *в* $\mathbb{R}^n$ *размерности d задается системой из $n - d$ линейных уравнений.*

2.3. Евклидовы пространства. Для векторов x, y из (10) их *скалярное произведение* определяется по формуле

$$(x, y) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Тогда $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$. Векторы x, y *перпендикулярны*, если $(x, y) = 0$. *Угол* ϕ между ненулевыми векторами x, y определяется как

$$\cos\phi = \frac{(x,y)}{\|x\|\,\|y\|}.$$

Базис $e_1, \ldots, e_n$ евклидова пространства E называется *ортонормированным*, если $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ для всех i, j, где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Матрицей Грама $\mathrm{Gr}(a_1, \ldots, a_m)$ системы векторов $a_1, \ldots, a_m$ называется квадратная матрица размера m, в которой на месте (i, j) стоит скалярное произведением (a_i, a_j).

Предложение 1.36. *Если система векторов $a_1, \ldots, a_m$ линейно зависима, то определитель* $\det \mathrm{Gr}(a_1, \ldots, a_m) = 0$. *Если же векторы $a_1, \ldots, a_m$ линейно независима, то* $\det \mathrm{Gr}(a_1, \ldots, a_m) > 0$.

Пусть задана плоскость $\Pi = a + U$ с направляющим подпространством U, и $z \in \mathbb{R}^n$. Тогда $z - a = b + c$, где $b \in U$, и вектор c перпендикулярен всем векторам из U.

Теорема 1.37. *Минимальное расстояние от z до всех векторов из Π равно длине вектора c. Элемент $a+b \in \Pi$ является ближайшей к z точкой из Π. Если $e_1, \ldots, e_m$ – произвольный ортонормированный базис U, то*

$$b = (z-a, e_1)e_1 + \cdots + (z-a, e_m)e_m.$$

Более того, если $f_1, \ldots, f_m$ – произвольный базис в U, то

$$\|c\| = \sqrt{\frac{\det \mathrm{Gr}(f_1, \ldots, f_m, z-a)}{\det \mathrm{Gr}(f_1, \ldots, f_m)}}.$$

2.3.1. **Упражнения.** Найти расстояние от вектора a до плоскости Π, где

1. $a = (4, 1, -4, -5)$, и $\Pi = (3, -2, 1, 5) + \langle (2, 3, -2, -2), (4, 1, 3, 2) \rangle$;

2. $a = (1, 1, -2, -3, -2)$ и

$$\Pi = (-8, -4, -3, -20, -2) + \langle (1, 1, 2, 0, 1), (2, 2, 1, 3, 1) \rangle;$$

3. $a = (2, 1, -3, 4), \quad \Pi : \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - 8x_3 + 13x_4 = -19, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1; \end{cases}$

4. $a = (1, -3, -2, 9, -4)$ и

$$\Pi : \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 + 2x_5 = -2, \\ x_1 - 2x_2 - 7x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 1. \end{cases}$$

2.4. Ранг матрицы. Пусть задана матрица A. *Рангом* матрицы A называется максимальное число линейно независимых строк. *Минором матрицы* порядка k в матрице A называется определитель любой квадратной подматрицы в A размера k.

Теорема 1.38. *Ранг матрицы A не меняется при элементарных преобразованиях строк и столбцов, Он равен числу ненулевых строк в ступенчатом виде матрицы A. Ранг матрицы равен максимальному числу линейно независимых столбцов матрицы и равен максимальному порядку ненулевого минора.*

Пусть задана система $AX = 0$ однородных линейных уравнений с матрицей A и столбцом неизвестных X высоты n. Тогда размерность подпространства решений этой системы равна $n-r$, где r – ранг матрицы A.

2.5. Собственные векторы и собственные значения. Рассмотрим пространство всех столбцов высоты n. Ненулевой столбец X называется *собственным векторов* для матрицы A с *собственным значением* λ, если $AX = \lambda X$. Таким образом, собственный вектор с собственным значением λ является ненулевым решением однородной системы линейных уравнений $(A - \lambda E)X = 0$. По теореме 1.28 Крамера у этой системы есть ненулевое решение в том и только в том случае, если $\det(A - \lambda E) = 0$. Таким образом, для нахождения собственных значений и собственных векторов необходимо сделать следующие шаги:

1. найти *характеристический многочлен* $\chi(t) = \det(A - tE)$;
2. найти корни характеристического многочлена $\chi(t)$;
3. для каждого корня λ многочлена $\chi(t)$ найти ненулевые решения системы однородных линейных уравнений $(A - \lambda E)X = 0$.

Теорема 1.39. *Пусть задана матрица A. Тогда собственные векторы для A с разными собственными значениями линейно независимы.*

Пример 1.40. Найдем собственные значения и собственные векторы матрицы
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$
Вычисляем характеристический многочлен
$$\chi(t) = \begin{vmatrix} 2-t & 2 \\ 3 & 7-t \end{vmatrix} = (2-t)(7-t) - 6 = t^2 - 9t + 8.$$
Находим его корни
$$t_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-32}}{2} = \frac{9 \pm 7}{2},$$
откуда $t_1 = 1,\ t_2 = 8$. Для $\lambda = 1$ имеем систему
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$
В этой системе уравнения пропорциональны. Поэтому можно взять первое из них, $x_1 + 2x_2 = 0$. Полагая $x_2 = 1$ получаем $x_1 = -2$, и собственным вектором является вектор $(-2, 1)$.

Если $\lambda = 8$, то получаем систему
$$\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0.$$
В этой системе уравнения снова пропорциональны. Поэтому можно взять второе из них, $3x_1 - x_2 = 0$. Полагая $x_2 = 3$ получаем $x_1 = 1$, и с обственным вектором является вектор $(1, 3)$.

2.5.1. **Упражнения.** Найти собственные векторы и собственные значения для матриц:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$;

2. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$;

5. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

2.6. Модель Леонтьева. Пусть отрасли $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ производят n видов продуктов в количествах $x_1, \ldots, x_n$. При этом

$$x_i = x_{i0} + x_{i1} + \cdots + x_{in}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $x_{ij},\ j \geqslant 1,$ — количество i-го продукта, использованного j-ой отраслью для своего производства, а x_{i0} — количество i-го продукта, использованного для потребления. Положим

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$$

— количество i-го продукта, использованного для производства единицы j-го продукта.

Таким образом, если $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица размера n, то

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{10} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{pmatrix}$$

или

$$(E - A) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{10} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{pmatrix}.$$

Если задан вектор потребления

$$\begin{pmatrix} x_{10} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{pmatrix},$$

то для нахождения вектора объемов производства нужно решить квадратную систему уравнений с матрицей $E-A$ и со столбцом свободных членов — вектором потребления. При этом нас интересует неотрицательные решения этой системы линейных уравнений.

Теорема 1.41. *Для неотрицательной квадрат ной матрицы A следующие условия эквивалентны:*

1. *матрица $E - A$ обратима и $(E - A)^{-1} \geqslant 0$;*

2. *все комплексные собственные значения A по модулю мельше 1.*

2.7. Матричные игры. Рассмотрим следующую игровую ситуацию. Имеются два игрока со стратегиями $1, \ldots, n$ и $1, \ldots, m$, соответственно. Задана числовая матрица $A = (a_{ij})$ размера $n \times m$. Если первый игрок выбирает i-ую стратегию, а второй j-ую, то результатом игры является число a_{ij}. Если это число положительно, то выигрывает первый игрок и результат выигрыша равен a_{ij}. Если это число отрицательно, то выигрывает второй с результатом $-a_{ij}$.

Предположим, что первый игрок выбрал стратегию i. Тогда второй игрок, чтобы нанести первому наибольший урон выбирает стратегию j так, чтобы $a_{ij} = \min_k a_{ik}$. Вообще говоря, второй игрок не знает стратегии первого игрока. Поэтому первый игрок для безопасности и ограничения проигрыша снизу должен выбрать i_1 так чтобы $a_{i_1,j_1} = \max_i \min_j a_{ij}$. Соответственно, второй для ограничения нанесения первому наибольшего гарантированного урона должен выбрать j_2 так, чтобы $a_{i_2,j_2} = \min_j \max_i a_{ij}$. Результатом игры будет число a_{i_1,j_2}. Тогда выполнено неравенство

$$a_{i_1,j_1} = \max_i \min_j a_{ij} \leqslant a_{i_1,j_2} \leqslant \min_j \max_i a_{ij} = a_{i_2,j_2}.$$

Рассмотрим пример игры с матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

В первой строке минимальный элемент равен -1, а во второй – равен 1. Максимальный элемент расположен во второй строке. Следовательно, первый игрок выбирает 2-ю стратегию.

Максимальный элемент в первом втором и третьем столбцах равен, соответственно, 3, 4, 3. Из них минимальный равен 3. Следовательно, второй игрок может выбрать 1-ую или 3-ю стратегии. Тогда результат игры 3 или 1.

2.8. Игры с природой. Пусть в матричной игре второй игрок действует неосознанно (природа или рынок) *Матрицей риска* для матрицы A называется матрица R, где $r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij} \geqslant 0$. Здесь $\max_i a_{ij}$ – максимум по всем элементам j-го столбца. Например, если

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 & -5 \\ 15 & 5 & 19 & 15 \\ 15 & -5 & 5 & 35 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

то максимумы по столбцам составляют, соответственно, 15, 7, 35. Поэтому

$$R = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 18 & 40 \\ 0 & 2 & 0 & 20 \\ 0 & 12 & 14 & 0 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

Таким образом, для уменьшения риска первому игроку выбирать стратегию, где достигается $\min_i \max_j r_{ij}$.

2.8.1. *Выбор по критерию математического ожидания выигрыша (риска).* Если в играх с природой известна вероятность p_i состояния природы с номером i и задана матрица $A = (a_{ij})$, то выбирается стратегия с номером k на котором достигается максимум

$$\sum_j a_{kj} p_k.$$

В то же время можно вычислить минимальное математическое ожидание риска как такую стратегию, на которой достигается

$$\min_i \left(\sum_j r_{ij} p_j \right).$$

Предложение 1.42. *При выборе стратегии с номером k по критерию максимального математического ожидания выигрыша, то на этой же стратегии достигается минимум по критерию риска.*

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \min_i \left(\sum_j r_{ij} p_j \right) &= \min_i \sum_j \left[\left(\max_t a_{tj} \right) - a_{ij} \right] p_j \\ &= \sum_j \left(\max_t a_{tj} \right) p_j - \max_i \left(\sum_j a_{ij} p_j \right) \end{aligned}$$

□

Например, если для матрицы (14) распределение вероятностей имеет вид

$$p_1 = \frac{2}{5}, \quad p_2 = p_3 = p_4 = \frac{1}{5},$$

то

$$\sum_j a_{1j} p_j = \frac{13}{5}, \quad \sum_j a_{2j} p_j = \frac{69}{5}, \quad \sum_j a_{3j} p_j = 13.$$

Максимум достигается на второй стратегии и поэтому нужно выбрать вторую стратегию по критерию максимального математического ожидания выигрыша. В тоже время по (15)

$$\min_i \left(\sum_j r_{1j} p_j \right) = \frac{78}{5}, \quad \min_i \left(\sum_j r_{2j} p_j \right) = \frac{22}{5},$$
$$\min_i \left(\sum_j r_{3j} p_j \right) = \frac{26}{5}.$$

Минимум достигается на второй стратегии и поэтому эту стратегию также нужно выбрать по критерию минимального математического ожидания риска.

2.8.2. *Максиминный критерий Вальда.* Критерий Вальда рассматривает "природу"как разумного противодействию игрока. По этому критерию нужно выбирать стратегию i, на которой достигается $\max_i \min_j a_{ij}$.

2.8.3. *Критерий минимального риска Севиджа.* Рассматриваемый критерий рекомендует выбирать стратегию с номером i, на которой достигается $\min_i \max_j r_{ij}$, где как и выше $r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij}$. Таким образом, этот критерий отражает позицию крайнего пессимизма и ориентируется не на гарантированный выигрыш, а на минимально возможный риск потерь от недостатка информации о реально складывающейся ситуации.

2.8.4. *Критерий Гурвица.* Этот критерий соответствует промежуточной позиции между пессимизмом и легкомысленным оптимизмом. Фиксируется коэффициент оптимизма $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Критерий рекомендует выбирать стратегию с номером i, на которой достигается

$$\max_i \left[\lambda \min_j a_{ij} + (1-\lambda) \max_j a_{ij} \right].$$

Чем больше страховка от неудач, тем больше λ. При $\lambda = 1$ получается критерий Вальда.

2.8.5. **Упражнения.**

1. Дана матрица игры двух игроков

2	−3	6
4	3	1

Решите задачу за второго игрока симплекс-методом.

2. Дана матрица игры с рынком

1	7	−3	4
5	6	4	5
7	2	0	3

.

Найти оптимальную стратегию по критерию максимального математического ожидания выигрыша, если набор вероятностей

$$q_1 = \frac{1}{2},\ q_2 = \frac{1}{12},\ q_3 = \frac{1}{6},\ q_4 = \frac{1}{4}.$$

3. Дана матрица игры двух игроков

3	−1	7
5	6	3

Решите задачу за второго игрока симплекс-методом.

4. Дана матрица игры с рынком

3	7	2	4
4	6	7	5
4	2	0	3

.

Найти оптимальную стратегию по критерию максимального математического ожидания выигрыша, если набор вероятностей

$$q_1 = \frac{1}{2},\ q_2 = \frac{1}{12},\ q_3 = \frac{1}{6},\ q_4 = \frac{1}{4}.$$

5. Дана матрица игры двух игроков

-3	1	7
5	6	-3

Решите задачу за за второго игрока симплекс-методом.

6. Дана матрица игры с рынком

3	7	2	4
-4	6	7	5
4	-2	0	3

.

Найти оптимальную стратегию по критерию максимального математического ожидания выигрыша, если набор вероятностей

$$q_1 = \frac{1}{2},\ q_2 = \frac{1}{12},\ q_3 = \frac{1}{6},\ q_4 = \frac{1}{4}.$$

7. Дана матрица игры двух игроков

7	-1	3
5	6	4

Решите задачу второго игрока симплекс-методом.

8. Дана матрица игры с рынком

-3	5	2	4
4	6	6	5
4	2	0	-3

.

Найти оптимальную стратегию по критерию максимального математического ожидания выигрыша, если набор вероятностей

$$q_1 = \frac{1}{2},\ q_2 = \frac{1}{12},\ q_3 = \frac{1}{6},\ q_4 = \frac{1}{4}.$$

9. Дана матрица игры двух игроков

5	-1	7
-3	6	3

Решите задачу за второго игрока симплекс-методом.

10. Дана матрица игры с рынком

4	6	2	4
5	−6	7	5
4	2	0	3

.

Найти оптимальную стратегию по критерию максимального математического ожидания выигрыша, если набор вероятностей

$$q_1 = \frac{1}{2},\ q_2 = \frac{1}{12},\ q_3 = \frac{1}{6},\ q_4 = \frac{1}{4};$$

2.9. Конечные бескоалиционные неантагонистические игры. Предположим, что в игре участвуют d игроков, у каждого из них имеется свое конечное множество стратегий X_i и своя функция выигрыша $H_i : X_1 \times \cdots \times X_d \to \mathbb{R}$. Если i-ый игрок выбрал стратегию $x_i \in X_i,\ 1 \leqslant i \leqslant d$, то в результате игры его выигрыш составит $H_i(x_1, \ldots, x_d)$. Эта игра называется *бескоалиционной неантагонистической игрой*. Если каждое X_i конечно, то игра конечна. В случае двух игроков игра называется *биматричной*. Действительно, пусть $X_1 = \{1, \ldots, n\},\ X_2 = \{1, \ldots, m\}$. Составим матрицы $H_1, H_2 \in \mathrm{Mat}(n \times m, \mathbb{R})$, где в H_1 (соответственно, в H_2) на месте (i, j) стоит число $H_1(i, j)$ (соответственно, $H_2(i, j)$), равное выигрышу 1-го (соответственно, 2-го) игрока. Таким образом, эта игра задается двумя матрицами. При этом всегда без ограничения общности можно считать, что $H_1, H_2 > 0$.

Как и выше рассматриваются *смешанные стратегии* $p_i = \{p_{ij} \mid j \in X_i\}$, где p_{ij} – вероятность того, что i-ый игрок выбрал j-ую стратегию. Тогда

$$p_{ij} \geqslant 0, \quad \sum_{j \in X_i} p_{ij} = 1.$$

В этом случае *средним результатом* или математическим ожиданием выигрыша i-го игрока является

$$H_i(p_1, \ldots, p_d) = \sum_{i_1 \in X_1, \ldots, i_d \in X_d} H_i(i_1, \ldots, i_d) p_{1,i_1} \cdots p_{d,i_d}.$$

Набор смешанных стратегий $p_1^*, \ldots, p_d^*$ называется *ситуацией равновесия по Нэшу*, если для каждого $i = 1, \ldots, d$ выполнено условие

$$H_i(p_1^*, \ldots, p_{i-1}^*, p_i^*, p_{i+1}^*, \ldots, p_d^*) \geqslant \\ H_i(p_1^*, \ldots, p_{i-1}^*, p_i, p_{i+1}^*, \ldots, p_d^*) \quad (16)$$

для любой смешанной стратегии p_i. Стратегия p_i^* называется *равновесной*, если она входит в некоторый набор ситуации равновесия по Нэшу.

Набор смешанных стратегий $p_1^*, \ldots, p_d^*$ называется *ситуацией равновесия по Парето*, если не существует такого набора

$$(p_1, \ldots, p_d),$$

что для каждого $i = 1, \ldots, d$ выполнено условие

$$H_i(p_1, \ldots, p_d) \geqslant H_i(p_1^*, \ldots, p_d^*), \tag{17}$$

причем для некоторого i_0 неравенство (17) строгое.

Теорема 1 (Нэш). *Любая конечная бескоалиционная игра имеет ситуацию равновесия на Нэшу.*

2.10. Биматричные игры. Пусть имеются игроки A и B со стратегиями

$$\{A_1, \ldots, A_m\} \text{ и } \{B_1, \ldots, B_n\},$$

соответственно. Пусть заданы платежные матрицы

$$C^A = \begin{pmatrix} c_{11}^A, & c_{1n}^A \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ c_{m1}^A, & c_{mn}^A \end{pmatrix}, \quad C^B = \begin{pmatrix} c_{11}^B, & c_{1n}^B \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ c_{m1}^B, & c_{mn}^B \end{pmatrix}.$$

Отметим, что вместо двух матриц C^A, C^B часто пишут одну матрицу C размера $m \times n$, в котором на месте (i, j) стоит пара чисел (c_{ij}^A, c_{ij}^B).

Игра происходит следующим образом. Каждый из двух игроков независимо по своим соображениям выбирают одну из своих стратегий и ходят одновременно. Если игрок A выбирает одну из своих стратегий, например, A_i, а игрок B — одну из своих стратегий, например, B_j, то результат игры для A равен c_{ij}^A, а для B — c_{ij}^B. В отношении обоих игроков действует следующее правило: если это число положительно, то игрок выигрывает это число, если оно отрицательно, то модуль этого числа — его проигрыш. Оба игрока заинтересованы в том, чтобы их результат был бы максимален.

Конечная антагоничтическая игра является частным случаем биматричной игры, когда $C^B = -C^A$.

Рассмотрим случай смешанных стратегий. Игрок A выбирает каждую из своих стратегий с вероятностями $p = \{p_1, \ldots, p_m\}$, а игрок B — с вероятностями $q = \{q_1, \ldots, q_n\}$. Тогда математической ожидание результата игры для A и для B равно, соответственно,

$$R^A(p, q) = \sum_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} p_i c_{ij}^A q_j, \quad R^B(p, q) = \sum_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} p_i c_{ij}^B q_j$$

Теорема 1.43. *Существует ситуация* (p^*, q^*) *равновесия по Нэшу, т.е. такие наборы вероятностей* (p^*, q^*) *для* A *и* B, *что для любых других наборов вероятностей* (p, q) *выполнены неравенства*

$$R^A(p, q^*) \leqslant R^A(p^*, q^*), \quad R^B(p^*, q) \leqslant R^B(p^*, q^*).$$

Рассмотрим вопрос о нахождении ситуации равновесия по Нэшу. Для этого выберем носители

$$S^A \subseteq \{A_1, \ldots, A_m\}, \quad S^B \subseteq \{B_1, \ldots, B_n\},$$

наборов вероятностей p, q, что

$$p_i > 0 \iff i \in S^A, \quad q_j > 0 \iff j \in S^B.$$

При выборе носителей $S^A,\ S^B$ рассмотрим системы уравнений и неравенств

$$\begin{cases} \sum_{i\in S^A} p_i = 1; \\ \sum_{i\in S^A} p_i c_{ij}^B = v^B, & j \in S^B; \\ p_i > 0, & i \in S^A. \end{cases}$$
$$\begin{cases} \sum_{j\in S^B} q_j = 1; \\ \sum_{j\in S_B} c_{ij}^A q_j = v^A, & i \in S^A; \\ q_j > 0, & j \in S^B. \end{cases} \tag{18}$$

Здесь v^A, v^B — результаты игры для A и B, соответственно.

Теорема 1.44. *Если системы* (18) *имеют решения* p^*, q^*, *то они задают ситуацию равновесия по Нэшу. Любая ситуация равновесия по Нэшу получается указанным способом при некотором выборе носителей* $S^A,\ S^B$.

Приведем пример применения теоремы 19. Пусть

$$C^A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad C^B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

2.11. Случай $S^A = \{A_1, A_2\},\ S^B = \{B_1, B_2\}$. Системы (18) принимают вид

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = 1; \\ 4p_1 - 3p_2 = v^B; \\ -2p_1 + 5p_2 = v^B; \\ p_1, p_2 > 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} q_1 + q_2 = 1; \\ q_1 + 2q_2 = v^A; \\ 3q_1 - q_2 = v^A; \\ q_1, q_2 > 0. \end{cases} \tag{19}$$

Тогда $p_2 = 1 - p_1,\ q_2 = 1 - q_1$. Поэтому в (19) получаем

$$\begin{cases} 7p_1 - 3 = v^B; \\ -7p_1 + 5 = v^B. \end{cases} \qquad \begin{cases} 2 - q_1 = v^A; \\ 4q_1 - 1 = v^A. \end{cases} \tag{20}$$

Отсюда

$$p_1 = \frac{4}{7},\ p_2 = \frac{3}{7}, \quad v^B = 1, \qquad q_1 = 0.6,\ q_2 = 0.4, \quad v^A = 1.4.$$

2.12. Случай когда одно из множеств S^A, S^B одноэлементно. Пусть $S^A = \{A_1\},\ S^B = \{B_1, B_2\}$. Тогда первая система из (18) имеет вид

$$\begin{cases} p_1 = v^B; \\ 4p_1 = v^B; \\ -2p_1 = v^B. \end{cases}$$

У этой системы нет решений. Аналогично рассматриваются случаи

$$S^A = \{A_2\},\ S^B = \{B_1, B_2\}; \qquad S^A = \{A_1.A_2\},\ S^B = \{B_1\};$$
$$S^A = \{A_1.A_2\},\ S^B = \{B_2\}.$$

2.13. Случай одноэлементных множеств S^A, S^B. Пусть

$$S_A = \{A_1\}, \quad S^B = \{B_1\}.$$

Тогда система (18) имеет вид

$$\begin{cases} p_1 = 1; \\ 4p_1 = v^B; \\ q_1 = 1; \\ q_1 = v^A. \end{cases}$$

Ее решение $p_1 = 1,\ v^B = \frac{1}{4},\ q_1 = v^A = 1$.

Пусть $S_A = \{A_1\},\ S^B = \{B_2\}$. Тогда система (18) имеет вид

$$\begin{cases} p_1 = 1; \\ -2p_1 = v^B; \\ q_1 = 1; \\ -q_1 = v^A. \end{cases}$$

Ее решение $p_1 = 1,\ v^B = -\frac{1}{2},\ q_2 = 1,\ v^A = -1$.

Пусть $S_A = \{A_2\},\ S^B = \{B_1\}$. Тогда система (18) имеет вид

$$\begin{cases} p_2 = 1; \\ -3p_2 = v^B; \\ q_1 = 1; \\ 3q_1 = v^A. \end{cases}$$

Ее решение $p_2 = 1,\ v^B = -\frac{1}{3},\ q_1 = 1,\ v^A = \frac{1}{3}$.

Пусть $S_A = \{A_2\},\ S^B = \{B_2\}$. Тогда система (18) имеет вид

$$\begin{cases} p_2 = 1; \\ 5p_2 = v^B; \\ q_2 = 1; \\ -q_2 = v^A. \end{cases}$$

Ее решение $p_2 = 1,\ v^B = \frac{1}{5},\ q_2 = 1,\ v^A = -1$.

2.14. Распределение кредита. В коные этой главы приведем пример алгоритма, решающего задачу об оптимальном распределении кредита. При этом мы не будем приводить его обоснование, оставив это в качестве упражнения для читателя.

Дана таблица зависимости прибыли от вложений в проекты P_1, P_2, P_3 различных сумм, указанных в первом столбце.

	P_1	P_2	P_3
1	$0,14$	$0,12$	$0,09$
2	$0,18$	$0,16$	$0,11$
3	$0,24$	$0,19$	$0,24$
4	$0,28$	$0,21$	$0,30$
5	$0,35$	$0,35$	$0,38$

(21)

Необходимо найти максимальную прибыль и указать, при каком распределении вложений он достигается.

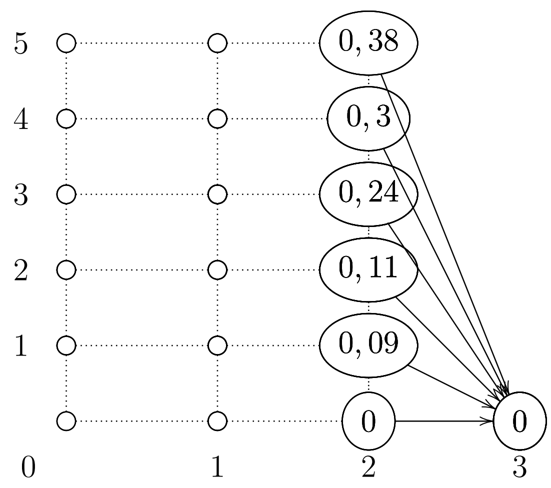
Для решения задачи составим два столбца

P_2'
0
$0,12$
$0,16$
$0,19$
$0,21$
$0,35$

P_3'
$0,38$
$0,30$
$0,24$
$0,11$
$0,09$
0

(22)

Первый столбец берется из второго столбца таблицы (21), соответствующего проекту P_2, но дополняется в первой позиции нулем. Второй столбец берется из третьего столбца (21), соответствующего проекту P_3, но дополняется нулем и записывается в обратном порядке. Составим диаграмму, в которой второй столбец из (22) впишем в третий столбец и соединим каждый элемент третьего столбца стрелкой с 0 в четвертом столбце. Получаем диаграмму



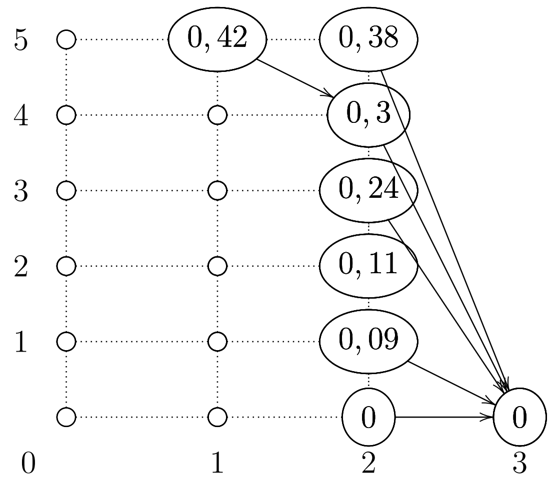
(23)

Приступим к заполнению второго столбца сверху. Для этого сложим покоординатно столбцы (22). Получаем столбец

$0,38$
$0,42$
$0,4$
$0,3$
$0,3$
$0,35$

(24)

Максимальный элемент 0,42 полученного столбца расположен во второй строке. Поэтому в диаграмме (23) во втором столбце в верхнее свободное место располагаем число 0,42. Кроме того, этот элемент в столбце (24) расположен на втором месте, так как получился при сложении с числом 0,30 из первого столбца. Поэтому в диаграмме число 0,42 соединяем с 0,30 из второго столбца из (22). Получаем диаграмму



(25)

Далее в первом столбце из (22) сдвигаем все элементы на одну позицию вниз. Получаем столбцы

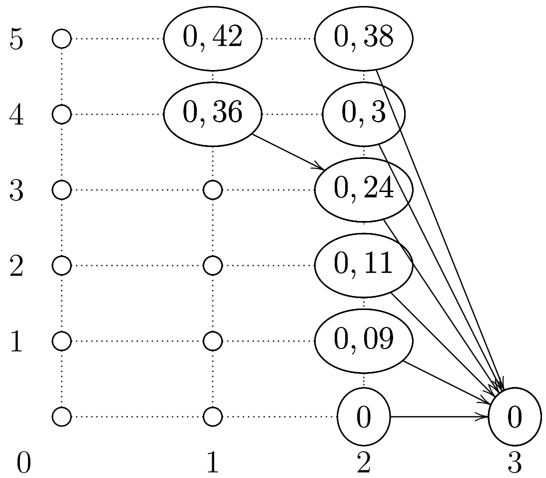
$*$	$0,38$
0	$0,30$
$0,12$	$0,24$
$0,16$	$0,11$
$0,19$	$0,09$
$0,21$	0

(26)

Складывая покоординатно, кроме первой позиции, получаем

0,30
0,36
0,27
0,28
0,21

Наибольший элемент 0,36 получается при сложении с числом 0,24 из второго столбца. Поэтому 0,36 помешаем в диаграмму (25) во второй столбец ниже 0,42 и соединяем 0,36 стрелкой с 0,24. Получаем новую диаграмму



(27)

Далее в первом из столбцов (26) осуществляем сдвиг чисел на одну позицию вниз. Получаем

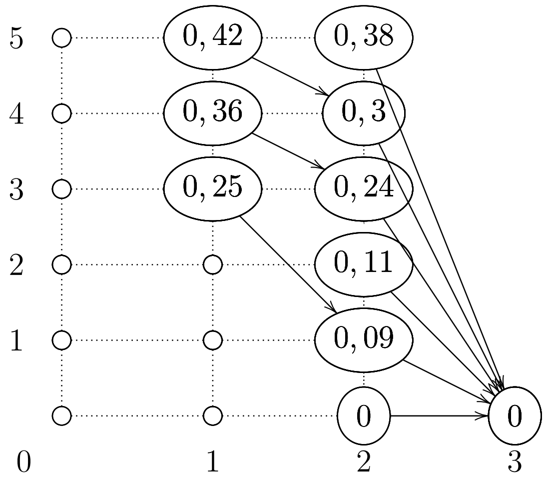
*	0, 38
*	0, 30
0	0, 24
0, 12	0, 11
0, 16	0, 09
0, 19	0

(28)

Складывая столбцы (28) без первых двух клеток, получаем

0,24
0,23
0,25
0,19

Максимальный элемент 0,25 вставляем в диаграмму (27) и соединяем стрелкой $0,25 \to 0,09$. Получаем диаграмму



(29)

Далее в первом из столбцов (28) осуществляем сдвиг чисел на одну позицию вниз. Получаем

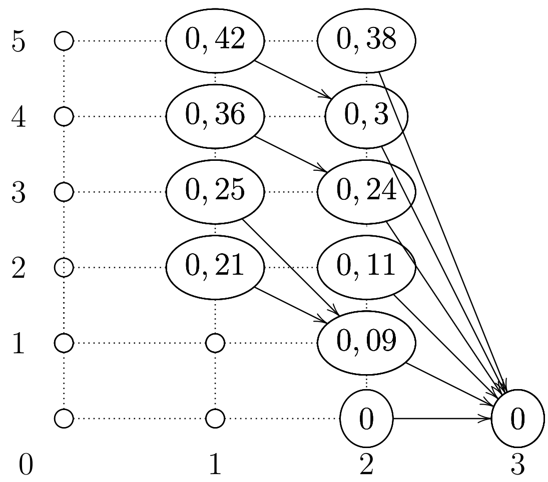
$*$	$0,38$
$*$	$0,30$
$*$	$0,24$
0	$0,11$
$0,12$	$0,09$
$0,16$	0

(30)

Складываем получившиеся столбцы без первых трех строк. Получаем

0,11
0,21
0,16

Максимальный элемент 0,21 вставляем в диаграмму (29) и соединяем $0,21 \to 0,09$. Получаем



Снова в первом из столбцов (30) осуществляем сдвиг на одну позицию вниз. Получаем

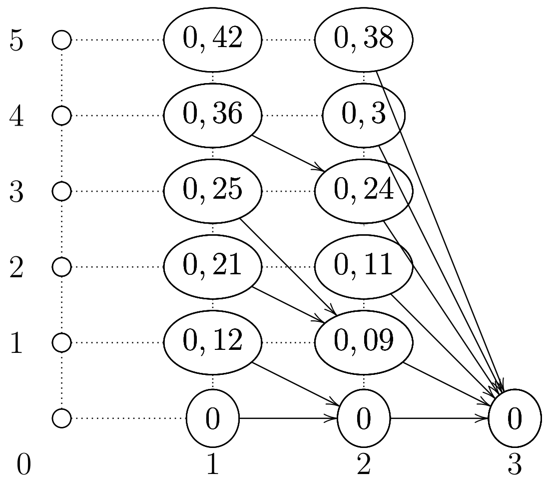
*	0,38
*	0,30
*	0,24
*	0,11
0	0,09
0,12	0

Складываем получившиеся столбцы без первых четырех и получаем

0,09
0,12

Максимальный элемент 0,12 помещаем в таблицу и рисуем стрелку $0,12 \to 0$. Наконец, в последнюю строку второго столбца вставляем

0, и получаем



(31)

Переходим к работе с новой парой столбцов. В качестве первого столбца берем первый столбец, соответствующий проекту P_1 в исходной таблице (21). Дополняем его сверху нулевым элементом. В качестве второго столбца берем построенный второй столбец из диаграммы (31). Получаем

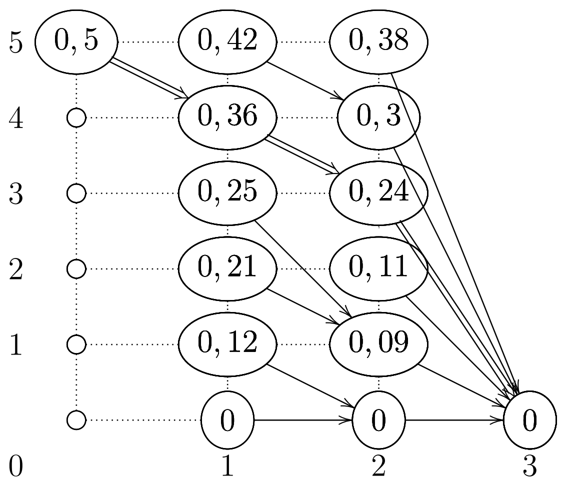
P_1'
0
0,14
0,18
0,24
0,28
0,35

0,42
0,36
0,25
0,21
0,12
0

Складывая покоординатно, получаем столбец

0,42
0,5
0,43
0,45
0,4
0,35

Максимальный элемент равен 0,5. Соединяем $0,5 \to 0,36$. Получаем диаграмму



Все вычисления завершены. Таким образом, максимальный доход равен 0,5. Он получается при вложении в P_1 суммы 1. Так как $0,36 \to 0,24$, а $0,24 \to 0$, то в проект P_2 вкладывается 1, а в проект P_3 – 3. Размеры вкладов определяются из последней диаграммы, если мы из крайней верхней левой клетки по выбранному пути попадаем в нулевую клетку в последнем четвертом столбце.

2.14.1. **Упражнения.** Дана таблица зависимости прибыли от вложений в дело различных сумм, указанных в первом столбце в проекты P_1, P_2, P_3. Найти максимальную прибыль и указать, при каком распределении вложений он достигается:

1)

	P_1	P_2	P_3	P_4
1	0,09	0,12	0,14	0,11
2	0,11	0,16	0,18	0,15
3	0,24	0,19	0,24	0,22
4	0,30	0,21	0,28	0,26
5	0,38	0,35	0,35	0,36

;

2)

	P_1	P_2	P_3
1	0,11	0,13	0,09
2	0,12	0,15	0,10
3	0,18	0,19	0,19
4	0,25	0,21	0,27
5	0,30	0,28	0,34

;

3)

	P_1	P_2	P_3
1	0,09	0,11	0,08
2	0,12	0,14	0,11
3	0,17	0,19	0,20
4	0,20	0,21	0,27
5	0,25	0,30	0,31

;

4)

	P_1	P_2	P_3
1	0,08	0,12	0,09
2	0,13	0,14	0,11
3	0,16	0,19	0,15
4	0,22	0,21	0,20
5	0,30	0,25	0,28

;

5)

	P_1	P_2	P_3
1	0,11	0,10	0,09
2	0,12	0,14	0,12
3	0,14	0,19	0,15
4	0,18	0,21	0,29
5	0,25	0,28	0,31

.

Глава 2

Математический анализ

1. Множества и функции

Множеством называется совокупность элементов, выделяемых некоторой системой свойств. Если элемент x принадлежит множеству X, то пишем $x \in X$. Если в множестве X существует элемент x, обладающий некоторым специальным свойством $\mathcal{P}$, то пишем $(\exists x \in X)\mathcal{P}$. Если в множестве X любой элемент x, обладающий некоторым специальным свойством $\mathcal{P}$, то пишем $(\forall x \in X)\mathcal{P}$. Если каждый элемент множества X принадлежит также множеству Y, то пишем $X \subseteq Y$. В этом случае X называется *подмножеством* в Y.

Через $\mathbb{N}$ обозначается множество всех натуральных чисел

$$\{1,\, 2,\, 3,\, \dots\}.$$

Через $\mathbb{Z}$ обозначается множество всех целых чисел, а через $\mathbb{R}$ – множество всех вещественных чисел.

Пространство векторов (точек) $\mathbb{R}^n$ состоит из множества точек

$$x = (x_1,\, \dots,\, x_n), \quad x_i \in \mathbb{R}. \tag{32}$$

В частности, $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$. *Длина* $\|x\|$ вектора x из (32) определяется как

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Расстояние между векторами

$$x = (x_1,\, \dots,\, x_n), \quad y = (y_1,\, \dots,\, y_n)$$

определяется как

$$\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Если $\varepsilon > 0$, то *n-мерная ε-окрестность* точки x из (35) определяется как внутренность шара $U_\varepsilon = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| < \varepsilon\}$. *Интервал* (a, b) в $\mathbb{R}$, где $a < b$, состоит из всех чисел $\{x \mid a < x < b\}$. В частности, при $n = 1$ *ε-окрестностью* $U_\varepsilon(a)$ точки $a \in \mathbb{R}$ при $n = 1$ называется $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \mid |x - a| < \varepsilon$. *Отрезок* $[a, b]$ где $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, состоит из всех чисел $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$. *Полуинтервал* $(a, b]$ (соответственно, $[a, b)$) где $a < b$, состоит из всех чисел $\{x \mid a < x \leqslant b\}$ (соответственно, $\{x \mid a \leqslant x < b\}$). Эти понятия обобщаются на произвольное n. *Параллелограммом* в $\mathbb{R}^n$, построенным на векторах $a_1, \ldots, a_k$ с вершиной в a_0 называется множество всех векторов

$$a_0 + \lambda_1(a_1 - a_0) + \cdots + \lambda(a_k - a_0),$$

где $0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1$ для всех $i = 1, \ldots, k$. В частности, при $n = k = 1$ параллелограмм превращается в отрезок $[a_0, a_1]$ при $a_0 < a_1$ или в отрезок $[a_1, a_0]$ при $a_1 < a_0$. Если $a_0 = a_1$, то получается одна точка a_0. Если $k = n = 2$, то получается либо отрезок прямой, либо обычный параллелограмм. При $k = n = 3$ получается либо отрезок прямой, либо параллелограмм, либо параллелепипед. Обобщением интервала на произвольное n является *Внутренность параллелограмма* в $\mathbb{R}^n$, построенным на векторах $a_1, \ldots, a_k$ с вершиной в a_0. Она состоит из всех векторов

$$a_0 + \lambda_1(a_1 - a_0) + \cdots + \lambda(a_k - a_0),$$

где $0 < \lambda_i < 1$ для всех $i = 1, \ldots, k$.

Если A, B – множества, то их *объединение* $A \cup B$ состоит из всех элементов, лежащих либо в A, либо в B. *Пересечение* $A \cap B$ состоит из всех элементов, лежащих и в A и в B. *Разность* $A \setminus B$ состоит из всех элементов множества A, не лежащих в B. Если A – подмножество в B, то *дополнением* $\overline{A}$ в B называется множество всех элементов из B, не принадлежащих A.

Например, если $A = \{1,\, 3,\, 6\}$, $B = \{1,\, 4,\, 2,\, 9,\, 8\}$, то

$$A \cup B = \{1,\, 2,\, 3,\, 4, 6,\, 8,\, 9\}, \quad A \cap B = \{1\}, \quad A \setminus B = \{3, 5\}.$$

Если $A = (-1, 4)$, $B = (2, 5]$, то $A \cap B = (2, 4)$, $A \cup B = (-1, 5]$. Если X – множество всех четных целых чисел, то дополнение $\overline{X}$ в множестве всех натуральных чисел $\mathbb{N}$ состоит из всех нечетных чисел.

Предложение 2.1. *Операции объединения, пересечения и дополнения обладают следующими свойствами:*

1) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
3) $A \cap A = A \cup A = A$;
4) $A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A$;
5) $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\quad \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Определение 2.2. Подмножество X в $\mathbb{R}^n$ *открыто*, если с каждой точкой $a \in X$ в X лежит некоторая ее окрестность $U_\varepsilon(a)$. Подмножество X в $\mathbb{R}$ *ограничено*, если существует такое число $M > 0$, что $|x| < M$ для всех $x \in X$.

Примером открытого множества является интервал (a, b) в $\mathbb{R}$, где $a < b$, внутренность параллалограмма при некоторых предположения, внутренность шара в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 2.3. *Объединение любого числа открытых множеств открыто. Пересечение конечного числа открытых множеств открыто.*

Определение 2.4. Подмножество X в $\mathbb{R}^n$ *замкнуто*, если его дополнение $\overline{X}$ в $\mathbb{R}$ открыто.

Примером замкнутого множества является отрезок $[a, b]$ в $\mathbb{R}$, где $a < b$, параллелограмм в $\mathbb{R}^n$. Из теоремы 2.3 вытекает

Теорема 2.5. *Пересечение любого числа замкнутых множеств замкнуто. Объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.*

Определение 2.6. Подмножество X в $\mathbb{R}^n$ называется *выпуклым*, если с каждыми его двумя точками $a, b \in X$ в X содержится целиком весь отрезок $[a, b]$.

Примером выпуклого множества является параллелограмм, его внутренность, шар, внутренность шара и т. д.

Определение 2.7. Предположим, что заданы два множества X, Y, причем каждому элементу $x \in X$ по некоторому правилу сопоставлен элемент $f(x) \in Y$. В этом случае мы говорим, что *задано отображение* $f : X \to Y$. Отображение $f : X \to Y$

1) *инъективно*, если из условия $f(x_1) = f(x_2)$ следует $x_1 = x_2$;
2) *сюръективно*, если для любого $y \in Y$ найдется такое $x \in X$, что $y = f(x)$;
3) *биективно*, если оно сюръективно и инъективно.

Например, отображение $f(x) = x^2$ из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ не сюръективно и не инъективно. Отображение $f(x) = 2x + 1$ из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ биективно. Отображение $f(x) = 2^x$ из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ инъективно, но не сюръективно. Отображение $f(x) = \sin x$ из $\mathbb{R}$ в $[-1, 1]$ сюръективно, но не инъективно. *Функцией* на множестве X называется отображение $f : X \to \mathbb{R}$. *Последовательностью* называется функция натурального аргумента, т. е. функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. При этом $f(k) = u_k,\ k \in \mathbb{N}$ называется *k-ым членом последовательности.*

Примерами последовательностей являются

1) арифметическая последовательность $u_k = u_{k-1} + d$,
2) геометрическая последовательность $u_k = u_{k-1}q$,
3) сумма вклада $S_k = S_0(1 + \dfrac{p}{100})^k$ в банке при первоначальном взносе S_0 и при p процентах годовых,
4) последовательность Фибоначчи $u_{k+2} = u_k + u_{k+1}$ при всех $k \geq 0$.

Определение 2.8. Пусть заданы отображения $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$. Определим отображение $gf : X \to Z$ по правилу $(gf)(x) = g(f(x))$ для всех $x \in X$. Отображение gf называется *произведением, или композицией* g и f.

Например, если $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, причем $f(x) = \sin x$, $g(x) = (x + 1)^2$, то

$$(gf)(x) = (\sin x + 1)^2, \quad (fg)(x) = \sin(x + 1)^2.$$

Предложение 2.9. *Если* $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to T$, *то* $h(gf) = (hg)f$.

Определение 2.10. *Графиком* функции $f : X \to \mathbb{R}$, где X – подмножество в $\mathbb{R}$ называется множество всех точек на плоскости с координатами $(x, f(x))$.

Основные классы функций. *Полиномиальная* функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеют вид

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Рациональная функция

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

где $p(x), q(x)$ – полиномиальные функции. Эта функция определена во всех вещественных точках, кроме корней многочлена $q(x)$.

Степенная функция $f(x) = x^\alpha$, где $\alpha \in \mathbb{R}$ определена при положительных значениях аргумента x. Ее график имеет вид, указанный в Рис. 2.1.

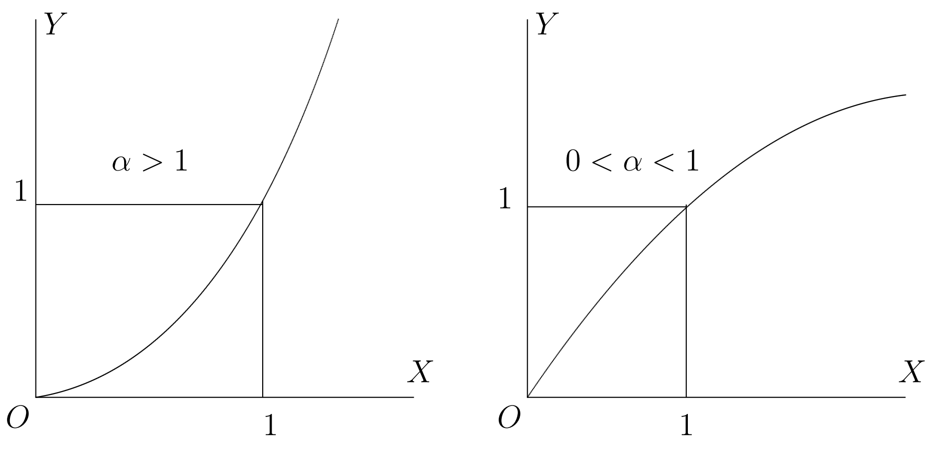


Рис. 2.1. График степенной функции $y = x^\alpha$ при $\alpha > 0$.

Если же $\alpha < 0$, то график $f(x) = x^\alpha$ имеет вид, указанный в Рис. 2.2.

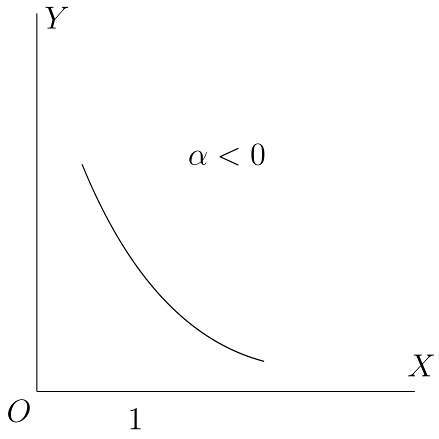


Рис. 2.2. График степенной функции $y = x^\alpha$ при $\alpha < 0$.

Показательная функция имеет $f(x) = a^x$, где a – положительное вещественное число, отличное от 1. Заметим, что $b^x = a^{x \log_a b}$. Ее график при $a > 1$ имеет вид, указанный в Рис. 2.3.

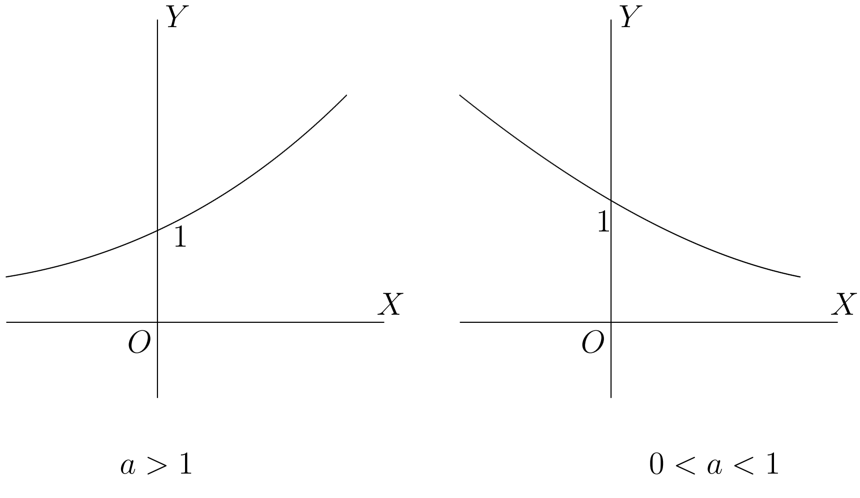


Рис. 2.3. График показательной функции $y = a^x$.

Логарифмическая функция $f(x) = \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$. Ее график имеет вид, указанный в Рис. 2.4.

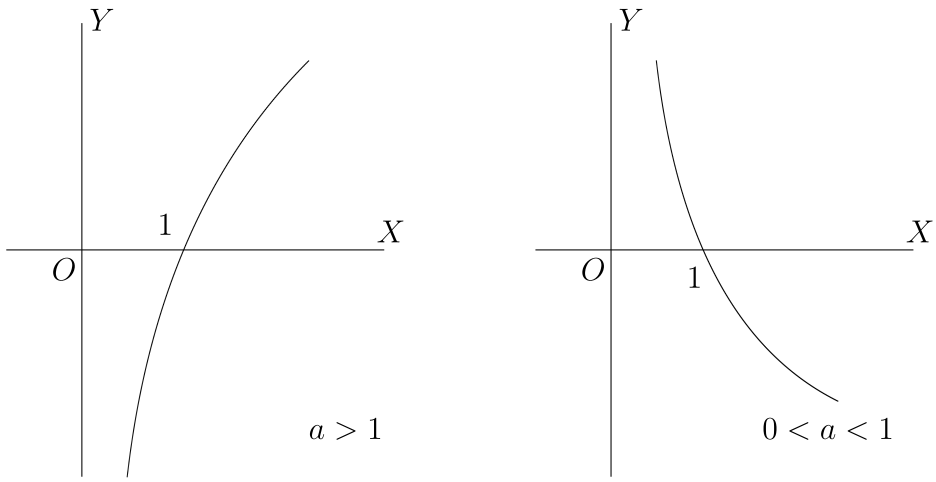


Рис. 2.4. График логарифмической функции $y = \log_a x$.

Функции спроса $Q(D)$ и предложения $Q(S)$ в зависимости от цены P имеют вид $Q(D) = P^\alpha + C$, где $\alpha < 0$, и $Q(S) = P^\beta + d$, где $\beta \geq 1$. Их совместный график имеет вид, указанный в Рис. 2.5.

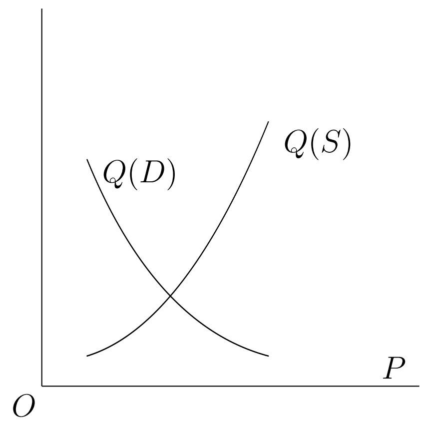


Рис. 2.5. Функции спроса $Q(D)$ и предложения $Q(S)$ в зависимости от цены P

1.1. Упражнения.

1. Найти расстояние между точками (0,-1,3) и (4,5,-2) в $\mathbb{R}^3$.

2. Что больше $\dfrac{2}{3}$ или $\dfrac{3}{4}$?

3. Доказать, что при $x > 0$ функция
$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$
возрастает.

4. Пусть
$$f(x) = \operatorname{tg} x, \quad g(x) = \frac{2x}{1-x^2}.$$
Найти $(gf)(x)$.

5. Построить графики функций:

a. $f(x) = x^3 + 1$,

b. $f(x) = (x+1)^3$;

c. $f(x) = 2x^4 - 3$;

d. $f(x) = -3(x-1)^4 + 3$;

e. $f(x) = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) - 3$;

f. $f(x) = \dfrac{-x+5}{2x-3}$;

g. $f(x) = 2 \cdot 3^{x-1} - 2$;

h. $f(x) = x \sin x$;

i. $y = \ln(x-5) + 2$;

j. $f(x) = \dfrac{5x-1}{-x+2}$.

6. Пусть $A = (-3, 5]$, $B = [4, 7)$. Найти $A \cup B$, $A \cap B$.

7. Пусть $A = [-3, 5)$, $B = (1, 4]$. Найти $A \cup B$, $A \cap B$.

8. Пусть $A = [0, 10)$, $B = (4, 15]$. Найти $A \cup B$, $A \cap B$.

9. Пусть функция f возрастает на отрезке $[a, b]$, а функция g возрастает на отрезке $[f(a), f(b)]$. Доказать, что функция gf возрастает на отрезке $[a, b]$.

10. Доказать, что для любых множество A, B, C справедливы равенства:

a. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

b. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

c. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

2. Производная

2.1. Пределы. В этом разделе мы будем рассматривать функции от одной вещественной переменной.

Определение 2.11. Последовательность векторов $x_k \in \mathbb{R}^n$ сходится к $x \in \mathbb{R}^n$, запись $x_k \to x$ или $\lim_{k\to\infty} x_k = x$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $M = M(\varepsilon)$, что $\|x_k - x\| < \varepsilon$ при всех $k \geqslant M$. Другими словами, $x_k \in U_\varepsilon(x)$ при всех $k \geqslant M$. Число x называется *пределом* последовательности x_k.

Например, при $n = 1$ последовательность $x_k = (-\frac{1}{3})^k \to 0$. Замечательный предел при $n = 1$:

$$(1 + \frac{1}{k})^k \to e = 2,71\ldots$$

Не все последовательности имеют предел. Например, при $n = 1$ последовательность $x_k = (-1)^k$ не может иметь предела.

Предложение 2.12. *Предел последовательности определен однозначно, если он существует. Если в $\mathbb{R}^n$ последовательности $x_k \to x$, $\quad y_k \to y$, то $x_k y_k \to xy$ и $x_k + y_k \to x + y$. Если $x_k \leqslant y_k$ начиная с некоторого M, то $x \leqslant y$. Если $y \neq 0$, то $\frac{x_k}{y_k} \to \frac{x}{y}$.*

Предложение 2.13. *Для подмножества $F \subseteq \mathbb{R}^n$ следующие условия эквивалентны:*

1) *подмножество F замкнуто;*
2) *если x_n, $n \geqslant 1$, последовательность элементов из F, сходящаяся к элементу a, то $a \in F$.*

Определение 2.14. Пусть функция $f(x)$ определена на подмножестве $U \subseteq \mathbb{R}^n$, не содержащем точку a. Скажем, что

$$\lim_{x\to a} f(x) = A,$$

где $A \in \mathbb{R}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что $|f(x) - A| < \varepsilon$, если $x \in U$ и $\|x - a\| < \delta$.

Скажем, что $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что $f(x) > \varepsilon$, если $\|x - a\| < \delta$ и $x \in U$.

Пусть $n = 1$ Предположим, что функция $f(x)$ определена при всех $x > b$ для некоторого $b \in \mathbb{R}$. Скажем, что $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$, где $A \in \mathbb{R}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что $|f(x) - A| < \varepsilon$, если $x > \delta$.

Пусть $n = 1$ Предположим, что функция $f(x)$ определена при всех $x > b$ для некоторого $b \in \mathbb{R}$. Скажем, что $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что $f(x) > \varepsilon$, если $x > \delta$.

Аналогично вводятся

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A, \quad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Пример 2.15. Имеются следующие пределы:

1. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$;

2. если $p(x)$ – произвольный многочлен, то $\lim_{x\to\infty} \dfrac{p(x)}{a^x} = 0$, при $a > 1$;

3. $e^{-x} \to 0$ при $x \to +\infty$;

4. $\dfrac{\sin x}{x} \to 1$ при $x \to 0$;

5. $\dfrac{1}{x^2} \to +\infty$ при $x \to 0$;

6. $-\dfrac{1}{x^2} \to -\infty$ при $x \to 0$.

Теорема 2.16. *Пусть функция $f(x)$ определена на подмножестве $U \subseteq \mathbb{R}^n$ и точка $a \in U$. Следующие условия эквивалентны:*

1. $\lim_{x\to a} f(x) = A$*;*

2. *для любой последовательности $x_k \to a$, $x_k \in U$, существует предел $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = A$.*

В частности, при $n = 1$ получается предел

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Из предложения 2.12 и теоремы 2.16 вытекает

Теорема 2.17. *Пусть функции $f(x), g(x)$ определена на подмножестве $U \subseteq \mathbb{R}^n$ точки a, причем*

$$\lim_{x\to a} f(x) = A, \quad \lim_{x\to a} g(x) = B.$$

Тогда

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = AB, \quad \lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = A + B,$$

и если $B \neq 0$, то

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = AB^{-1}.$$

Теорема 2.18. *Пусть функция $f(x)$ ограничена на подмножестве $U \subseteq \mathbb{R}^n$, содержащем точку a, и $g(x) \to 0$ при $x \to a$ и $x \in U$. Тогда $f(x)g(x) \to 0$ при $x \to a$ и $x \in U$.*

2.2. Упражнения.

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2-3x+2}{2x-1}$;

2. $\lim_{x\to 2} \dfrac{\ln(2x-1)}{x^2+3}$;

3. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x^2+5x-4}{3x^2+5}$;

4. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x^2+6}{x^5-1}$;

5. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{\ln(3x-4)}{x^2+2x-8}$;

6. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

7. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$; воспользоваться равенством

$$\cos x-\cos 3x = 2\sin 2x \sin 4x;$$

8. $\lim_{x\to \infty} \left(1+\dfrac{k}{x}\right)^x$ при $k>0$;

9. $\lim_{x\to \infty} \left(\dfrac{1}{2}\log_a(1+x)\right)$ при $a>0,\ a\neq 1$;

10. $\lim_{x\to \infty} \left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$;

11. $\lim_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)$;

12. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{1+x}$;

13. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{2x}$;

14. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$;

15. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x}$;

16. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} 3x}$;

17. $\lim_{x\to \infty} \left(\dfrac{2x+1}{3x-4}\right)^{2x+1}$.

2.3. Непрерывные функции. Пусть функция $f(x)$ определена на подмножестве $U \subseteq \mathbb{R}^n$ и задана точка a. Функция $f(x)$ *непрерывна* в точке a, если $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Из теоремы 2.17 следует, что если функции $f(x), g(x)$ непрерывны в a, то этим же свойством обладают функции

$$f(x) + g(x), \quad f(x)g(x)$$

и функция $f(x)g(x)^{-1}$, если $g(a) \neq 0$.

Теорема 2.19. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом ограниченном подмножестве $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Тогда функция $f(x)$ достигает в некоторых точках из U максимума и минимума. Пусть $n = 1$ и f – непрерывная функция на отрезке $[a, b]$. Если $d \in [f(a), f(b)]$, то существует такое число $c \in [a, b]$, что $f(c) = d$.*

Теорема 2.20. *Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на подмножестве $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Предположим, что имеется n непрерывных функций $g_i(y)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, определенных и непрерывных на подмножестве $V \subseteq \mathbb{R}^m$, причем*

$$(g_1(y_1, \ldots, y_m), \ldots, g_n(y_1, \ldots, y_m)) \in U$$

для всех $(y_1, \ldots, y_m) \in V$. Тогда произведение функций (сложная функция) $f\left(g_1(y_1, \ldots, y_m), \ldots, g_n(y_1, \ldots, y_m)\right)$ непрерывна в V.

Теорема 2.21. *Пусть функция $f(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, непрерывна в окрестности точки $a \in \mathbb{R}^n$. Если $f(a) > 0$, то в некоторой окрестности точки a функция f принимает положительные значения*

2.4. Упражнения. Доказать непрерывность функций:

1. $f(x) = \ln \dfrac{x+1}{x-1} + \sin(1 + e^x)$ при $x > 1$;

2. $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x^2 + y^2} - \sin(x - y)$ при $(x, y) \neq (0, 0)$.

2.5. Производная. В этом разделе мы будем рассматривать функции от одной переменной из $\mathbb{R}$.

Определение 2.22. Пусть функция $f(x)$ определена в $U_\varepsilon(a) \subseteq \mathbb{R}$. Тогда

$$f'(a) = \frac{df}{dx}(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Пусть функция f определена на некотором открытом подмножестве $X \subseteq \mathbb{R}$, причем в каждой точке $a \in X$ существует производная $f'(a)$. В этом случае говорят, что функция f *дифференцируема* на X.

Геометрический смысл: в Рис. 2.6 производная $f'(a) = \operatorname{tg} \alpha$, где α – угол между осью OX и касательной к графику функции $f(x)$ в точке a.

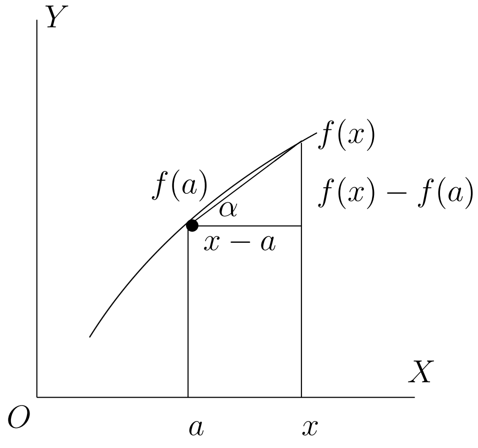


Рис. 2.6. Геометрический смысл производной.

Теорема 2.23. *Пусть функция f определена в $U_\varepsilon(x)$ и имеет производную в точке x. Тогда f непрерывна в точке x.*

Теорема 2.24. *Пусть функции f, g определены в $U_\varepsilon(x)$ и имеют в точке x производную. Тогда справедливы следующие утверждения:*

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x), \quad (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

и если $g(x) \neq 0$, то

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

В частности,

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad (\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x,$$

$$(e^x)' = e^x, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Упражнение 2.25. $f' = 0 \iff f = Const$. Кроме того,

$$(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0)'$$
$$= na_n x^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \cdots + a_1.$$

Пример 2.26.

$$\left(\frac{2x-1}{3x+1}\right)' = \frac{(2x-1)'(3x+1) - (2x-1)(3x+1)'}{(3x+1)^2} = \frac{5}{(3x+1)^2}.$$

Теорема 2.27. *Пусть функция $f(x)$ определена в $U_\varepsilon(a)$ и имеет производную в точке a. Предположим, что функция $g(x)$ определена в $U_\delta(f(a))$ и имеет производную в точке $f(a)$. Тогда сложная функцию gf имеет производную в точке a, причем $(gf)'(a) = g'(f(a))f'(a)$.*

Пример 2.28.

$$\big[\ln(1+x^2)\big]' = \ln'(1+x^2)(1+x^2)' = \frac{1}{1+x^2} \times (2x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

Определение 2.29. Пусть функция f определена в окрестности точки x и принимает в этой окрестности ненулевые значения. *Эластичностью* функции f в точке x называется

$$E_x(f) = f'(x)\frac{x}{f(x)}.$$

Теорема 2.30. *Пусть функции u, v определены в окрестности точки x и принимает в этой окрестности ненулевые значения. Тогда*

$$E_x(uv) = E_x(u) + E_x(v), \quad E_x(x^n) = n,$$
$$E_x(a^x) = x \ln a, \quad E_x(ax+b) = \frac{ax}{ax+b},$$
$$E_x\left(\frac{u}{v}\right) = E_x(u) - E_x(v).$$

Геометрический смысл эластичности указан в Рис. 2.7, где

$$E_x(f) = -\frac{CB}{CA} \times \frac{B}{|B|} \times \frac{A}{|A|}.$$

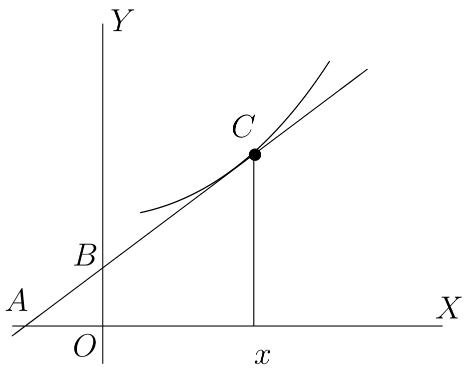


Рис. 2.7. Геометрический смысл эластичности.

Эластичность часто используется в экономическом анализе. Например, пусть $Q = Q(P)$ – количество проданного товара при цене P. Если абсолютная величина эластичности $|E(Q)| > 1$, то *спрос эластичен по цене.* Если $|E(Q)| = 1$, то спрос *нейтрален*, а если $|E(Q)| < 1$, спрос *неэластичен по цене.* При эластичном спросе $E(Q) < -1$ повышение цены ведет к снижению спроса, а снижение цены ведет к увеличению выручки. При наличии близких заменителей эластичность снижается, так как увеличение цены приведет к тому, что потребитель уменьшит покупку этого товара и увеличит покупку его заменителя.

Если $Q = Q(P)$ количество проданного товара при цене P на заменитель, то $E(P)$ – перекрестная эластичность характеризует взаимозаменяемость товара.

Эластичность спроса по доходу. Положительная эластичность ххарактеризует качественные товары, отрицательная величина – некачественные товары. Высокая положительная эластичность характеризует отрасли, вносящие больший вклад в экономический рост, а с малой эластичностью – производства, которые ожидают застой или сокращение.

Перекрестная эластичность спроса по цене определяется функцией спроса на один товар в зависимости от цены на другой (замещающий) товар. Положительность эластичности свидетельствует о замещаемости, отрицательный – о дополняемости. Эластичность спроса по цене характеризуется наличием и количеством заменителей. Чем больше заменителей, тем выше эластичность. Эластичность спроса по цене тем выше, что выше удельный вес расходов на данное благо в доходе потребителя.

В экономическом анализе при исследовании различных функций $f(x)$ от одной переменной $x \in \mathbb{R}$ важную роль играют следующие параметры:

✠ *средняя величина функции* $Af(x) = \dfrac{f(x)}{x}$;
✠ *маржинальная* или *предельная величина* $Mf(x) = f'(x)$.

При совершенной конкуренции цена товара p не зависит от от объема Q производства фирмы. Поэтому выручка от продаж $R = pQ$, а доход $\Pi = R(Q) - C(Q)$, где C - издержки. Отсюда $MR = p = AR$. Пусть задан график $C(Q)$, причем $C(Q) \leqslant R(Q)$ при $x \in [0, Q_2] \cup [Q_4, \infty]$, и $C(Q) < R(Q)$ при $Q \in (Q_2, Q_4)$. Пусть в точках $Q_1 \in (0, Q_2)$ функция $\Pi(Q)$ достигается минимум на $[0, Q_2]$, а при $Q_3 \in [Q_2, Q_4]$ – максимум. Тогда можно показать, что функция MC достигает в точке Q_2 минимума, а функция AC достигает минимума в Q_3. Поэтому Таким образом, оптимальным является объем производства Q_3.

При монополии фирма сама выбирает цену, исходя из кривой спроса $p(Q)$, являющейся возрастающей функцией, причем рост этой кривой убывает, т. е. $p' > 0$, но $p'' < 0$. Тогда $AR = p(Q)$, но график предельного дохода $MR < AR$ лежит ниже графика среднего дохода и MR, AR могут быть убывающими прямыми.

Определение 2.31. Пусть функция f определена в окрестности точки a. Скажем, что точка a является точкой *локального максимума (минимума)*, если существует такая окрестность $U_\varepsilon(a)$ точки a, что $f(x) \leqslant f(x)$ (соответственно, $f(x) \geqslant f(x)$) для всех $x \in U_\varepsilon(a)$.

Производная применяется для вычисления локальных экстремумов (минимумов и максимумов) функций. Это применение основано на следующей

Теорема 2.32. *Пусть функция f задана дифференцируемая в окрестности точки x. Если $f'(x) > 0$, (соответственно, $f'(x) < 0$) то в некоторой окрестности $U_\varepsilon(x)$ функция f возрастает (соответственно, убывает).*

Следствие 2.33 (Необходимое условие экстремума). *Предположим, что функция f дифференцируема в окрестности точки локального экстремума a. Тогда $f'(a) = 0$.*

Условие равенства нулю производной необходимо но не достаточно. Например, $f(x) = x^3$ имеет нулевую производную при $x = 0$, но функция возрастает с ростом x. Для более тонкого исследования применяется *вторая производная* $f''(x) = [f'(x)]'$. Если $f''(x) > 0$ (соответственно, $f''(x) < 0$), то говорят, что в точке x функция f *выпукла вверх (вниз).*

Теорема 2.34. *Пусть функция f дифференцируема в окрестности точки x, причем*

$$f'(x) = 0, \quad f''(x) > 0$$

(соответственно, $f'(x) = 0$, $f''(x) < 0$). Тогда x является точкой локального минимума (максимума) см. Рис. 2.8.

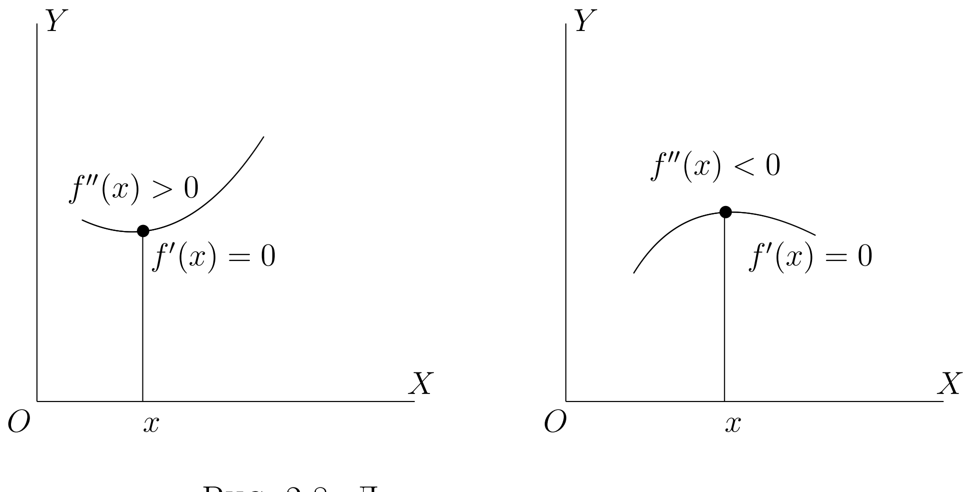


Рис. 2.8. Локальные экстремумы.

Пример 2.35. Найдем экстремумы функции $f(x) = x^3 - 3x + 5$ на отрезке $[-2, 4]$ Имеем $f'(x) = 3x^2 - 3x$. Производная обращается в нуль при $x = \pm 1$. При этом $f''(x) = 6x$. Следовательно,

$$f''(-1) = -6 < 0, \quad f''(1) = 6 > 0.$$

Поэтому по теореме 2.34 точка $x = -1$ является локальным максимумов, а точка $x = 1$ – локальным минимумом. По теореме 2.19 функция f имеет на отрезке $[-2, 4]$ максимум и минимум. Во всех внутренних точках мы используем производную. Остается просмотреть концы отрезка – точки $x = -2$ и $x = 4$. Сравним значения функции в точках локального экстремума и в концах отрезка. Получаем

$$f(-2) = -8 + 6 + 5 = 3, \quad f(-1) = -1 + 3 + 5 = 7,$$
$$f(1) = 1 - 3 + 5 = 3, \quad f(4) = 64 - 12 + 5 = 57.$$

Таким образом, максимум f на отрезке $[-2, 4]$ достигается в точке $x = 4$ и равен 57. Минимум f на отрезке $[-2, 4]$ достигается в точках $x = -2$, $x = 1$ и равен 3.

Пример 2.36. Пусть функция прибыли $\Pi(Q)$ в зависимости от объема производства Q имеет вид $\Pi(Q) = Q^2 - 8Q + 10$. Выясним в каких объемах нужно производить продукцию. Для этого найдем минимум прибыли $\min \Pi(Q)$. В этой точке Q имеем $\Pi'(Q) = 2Q - 8 = 0$, т. е. $Q = 4$. Следовательно, при $Q < 4$ функция $Q(p)$ убывает, а при $Q > 4$ возрастает. Следовательно, минимальный объем производства должен быть > 4.

Теорема 2.37 (Разложение в ряд Тейлора). *Пусть функция f имеет производные до порядка $k+1$ в окрестности точки a. Тогда*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \lambda_k(x)(x-a)^{k+1},$$

где $\lambda_k(x)$ ограничено в некоторой окрестности точки a.

Пример 2.38.

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots \\
\ln(1+x) &= \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_n (-1)^n \frac{x^2 n}{(2n)!}; \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_n (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+)!}; \\
\sqrt[n]{1+x} &= 1 + \frac{1}{n}x + \frac{\frac{1}{n}(\frac{1}{n} - 1)}{2!}x^2 + \cdots \\
&= \sum_k \frac{\frac{1}{n}(\frac{1}{n} - 1) \cdots \left(\frac{1}{n} - (k-1)\right)}{k!} x^k.
\end{aligned}$$

2.6. Упражнения. Вычислить производную и эластичность функций:

1. $y = x^3 - 5x + 4$;

2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 4}{x - 2}$ при $x \neq 2$;

3. $f(x) = \ln \dfrac{2x+1}{x-3}$ при $x > 3$;

4. $f(x) = x^2 \log_3 x - e^x \operatorname{tg} \dfrac{1}{x}$ при $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$;

5. $f(x) = \dfrac{1}{x} + \sqrt{x}$ при $x > 0$;

6. $f(x) = \ln(\ln x)$ при $x > 0$;

7. $f(x) = \sin^2(2x+1)$;

8. $f(x) = x^{x+1}$ при $x > 0$;

9. $f(x) = x^{\cos x}$ при $x > 0$.

10. Пусть $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{2x^2}$. Найти $f'(2) - f(2)$.

11. Найти пределы с использованием формулы Тейлора:

a. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$;

b. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$;

c. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2}$.

12. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функций:

a. $y = x^3 - 6x^2 + x$;

b. $y = \dfrac{2x^2}{1+x}$;

c. $y = 2x^2 + \ln x$.

13. Разложить 12 в сумму двух чисел $12 = x + y$ таким образом, что произведение xy было бы максимальным.

14. Пусть величина издержек $C = 30Q - 0,08Q^3$. Найти AC и QC при $Q = 10$.

15. Величины спроса D и предложения S в зависимости от цены p имеют вид $D = 30 - 0,9P,\ S = 16 + 1,2P$.

a. Найти эластичность спроса в точке равновесия.

b. Как изменится равновестная цена и элестичность спроса при уменьшении предложения на 25%?

16. Найти экстремумы функций:

a. $y = \dfrac{2x^2}{1+x}$;

b. $y = \dfrac{x^2-1}{x}$;

c. $y = xe^{-x}$;

d. $y = x^3 - 5x^2 + 3$.

3. Интеграл

Определение 2.39. Пусть на отрезке задана функция f. Функция F называется *неопределенным интегралом* функции f, если $F'(x) = f(x)$ для любого x из отрезка, обозначение

$$F(x) = \int f(x)dx. \tag{33}$$

Заметим, что $F(x)$ определено с точностью до постоянного слагаемого C, поскольку $C' = 0$.

Теорема 2.40. *Пусть функция f непрерывна на отрезке. Тогда функция $F(x)$ существует и определено с точностью до постоянного слагаемого C.*

Теорема 2.41. *Пусть на отрезке заданы непрерывные функции f, g и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда*

$$\int (\alpha f + \beta g)\, dx = \alpha \left(\int f(x)dx \right) + \beta \left(\int g(x)dx \right).$$

Приведем таблицу основных интегралов.

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C;$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \quad |x| < 1;$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C. \quad 0 < a \neq 1; \quad \int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C; \quad \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, \quad x \neq \pi k \quad k \in \mathbb{Z};$$
$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad |x| \neq |a| \neq 0;$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln |x + \sqrt{x^2+k}| + C, \quad |x| > |k| \text{ при } k < 0.$$

Теорема 2.42. *Пусть заданы непрерывные функции $f(x)$, $g(t)$. Тогда*
$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt.$$

Теорема 2.43 (Интегрирование по частям). *Пусть заданы непрерывные функции u, v на отрезке. Тогда*
$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

Пример: вычисление
$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Определение 2.44. Предположим, что функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Выберем последовательность точек $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} = b$ и рассмотрим сумму $\sum_{i=1}^{n+1} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$. Предел этих сумм при $\max(x_i - x_{i-1}) \to 0$ называется *определенным интегралом*
$$\int_a^b f(x)dx. \tag{34}$$
Он равен площади фигуры, ограниченной прямыми OX, $y = a$, $y = b$ и графиком функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. При этом площадь, расположенная выше оси OX берется со знаком $+$, а ниже – со знаком - .

Теорема 2.45. *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $F(x)$ – ее неопределенный интеграл, то определенный интеграл* (34) *существует и*
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x) \mid_a^b,$$
где $F(x)$ из (33).

Например, вычислим площадь фигуры, ограниченной графиком
$$f(x) = x^2 + 2x + 2$$
на отрезке $[2, 3]$. Заметим, что $f'(x) = 2x + 2 > 0$ при $x \in [2, 3]$. Поэтому график функции имеем вид Рис. 2.9

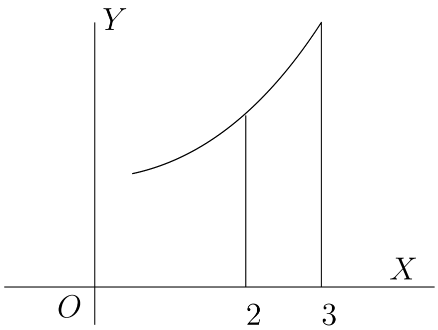


Рис. 2.9. Интегралы и площадь.

Имеем

$$\begin{aligned}\int_2^3 (x^2+2x+3)dx &= \int_2^3 x^2dx + 2\int_2^3 xdx + 2\int_2^3 dx\\ &= \frac{x^3}{3}\Big|_2^3 + 2\frac{x^2}{2}\Big|_2^3 + 3x\Big|_2^3\\ &= \left(\frac{27}{3}-\frac{8}{3}\right) + (9-4) + 3(3-2)\\ &= 9-\frac{8}{3}+5+3 = 17-\frac{8}{3} = \frac{43}{3}.\end{aligned}$$

Вычислим интеграл

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx.$$

Положим $x=\sin t$. Тогда

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin t^2}\,d(\sin t)\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,d(\sin t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\,dt\\ &= \frac{1}{2}t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\,d(2t) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

3.0.1. **Упражнения.**

1. Вычислить неопределенные интегралы:

a. $\int (x^3+3x^2-x+1)dx$;

b. $\int \left(x^2 - 2\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3}\right)dx$;

c. $\int (2^x + 3e^{3x})dx;$

d. $\int (\sin x + 3\cos x)dx;$

e. $\int \sin 5x dx;$

f. $\int \cos(2x-3)dx;$

g. $\int \frac{e^x}{\sqrt{x}}dx;$

h. $\int x \ln x dx;$

i. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx;$

j. $\int xe^{-x}dx;$

k. $\int xe^{5x}dx.$

2. Вычислить определенные интегралы:

a. $\int_0^2 (3x^2-1)dx;$

b. $\int_0^8 \left(\sqrt{2x} - \sqrt[3]{x}\right) dx;$

c. $\int_1^2 (x^2 - \frac{1}{x^2})dx;$

d. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx;$

e. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx;$

f. $\int_0^1 xe^x dx.$

3. Найти площадь, ограниченную фигурами:

a. $y = 4 - x^2,\ y = 0;$

b. $y = x^2,\ y = 1;$

c. $y = \ln x,\ y = e,\ y = 0;$

d. $y = \sqrt{x},\ y = x,\ 0 \leqslant x \leqslant 1;$

e. $y = \frac{1}{x},\ x = 1,\ x = 3;$

f. $y = x^2,\ x = 0,\ x = 2.$

4. Функции многих переменных

Напомним ряд определений и утверждения о функциях многих переменных, о которых шла речь в § 1 и § 2. Пространство векторов (точек) $\mathbb{R}^n$ состоит из множества точек

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \quad x_i \in \mathbb{R}. \tag{35}$$

Сложение векторов и умножением вектора на число производится покоординатно. *Длина* $\|x\|$ вектора x из (35) определяется как

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Расстояние между векторами

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, \ldots, y_n)$$

определяется как

$$\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

n-мерная окрестность точки x из (35) определяется как шар

$$U_\varepsilon = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| < \varepsilon\}.$$

Подмножество X в $\mathbb{R}$ *открыто*, если с каждой точкой $a \in X$ в X лежит некоторая ее окрестность $U_\varepsilon(a)$. Подмножество X в $\mathbb{R}$ *ограничено*, если существует такое число $M > 0$, что $\|x\| < M$ для всех $x \in X$.

Функцией от n-переменных, заданной на подмножестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$, называется отображение $f : X \to \mathbb{R}$. Пусть X – открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется *непрерывной*, в точке $x \in X$ если $\lim_{y\to x} f(y) = f(x)$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ для всех y, где $\|y - x\| < \delta$.

Теорема 2.46. *Пусть f, g непрерывные функции заданы на открытом подмножестве X в $\mathbb{R}^n$. Тогда $f + g$, fg непрерывные на X. Композиция непрерывных функций непрерывна. Если функция f непрерывна на X, то она непрерывна, как функция от каждой своей переменной. Непрерывная функция на замкнутом ограниченном подмножестве в $\mathbb{R}^n$ достигает в некоторых точках максимума и минимума.*

Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$, определена на открытом подмножестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Рассмотрим ее как функцию одного аргумента x_i и введем частную производную

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Определение 2.47. Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ определена на открытом подмножестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Скажем, что функция f *дифференцируема* в X, если в каждой точке $x \in X$ существуют частные производные и они непрерывны.

Теорема 2.48. *Пусть функция $f : X \to \mathbb{R}$ определена и дифференцируема на открытом подмножестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Тогда функция f непрерывна на X. Если вторые производные*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n,$$

непрерывны в X, то

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n.$$

Теорема 2.49 (Дифференцирование сложных функций). *Предположим, что функция $f : X \to \mathbb{R}$ определена и дифференцируема на открытом подмножестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Предположим, что заданы дифференцируемые функции*

$$g_i(y_1, \ldots, y_m), \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

определенные на открытом множестве $Y \subset \mathbb{R}^m$. Тогда функция

$$F(y_1, \ldots, y_m) = f(g_1(y_1, \ldots, y_m), \ \ldots, \ g_n(y_1, \ldots, y_m))$$

также является дифференцируемой, причем

$$\frac{\partial F}{\partial y_j} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial g_1}{\partial y_j} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial g_n}{\partial y_j}. \tag{36}$$

Пример 3. Пусть

$$f = \sin x_1 - x_2^3, \quad g_1 = 2y_1 - y_2, \ g_2 = y_1 + \ln y_2.$$

Тогда

$$F = \sin(2y_1 - y_2) - (y_1 + \ln y_2)^3.$$

Отсюда

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} = 2\cos(2y_1 - y_2) - 3(y_1 + \ln y_2)^2;$$
$$\frac{\partial F}{\partial y_2} = -\cos(2y_1 - y_2) - 3(y_1 + \ln y_2)^2 \frac{1}{y_2}.$$

Определение. *Градиентом* $\operatorname{grad} f$ непрерывно дифференцируемой функции f называется вектор-функция, значение которого в точке $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\operatorname{grad} f = \operatorname{grad} f(a) = \left(\tfrac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \ \tfrac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right) \in \mathbb{R}^n.$$

Пользуясь определением градиента мы можем систему равенств (36) можно записать в следующем матричном виде Систему равенств (36) можно записать в матричном виде, именно

$$\operatorname{grad} F(y_1,\dots,y_m) = \operatorname{grad} f(y_1,\dots,y_m)\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_n} \\ \dots\dots & & \\ \frac{\partial g_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial y_n}\end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{grad} f(y_1,\dots,y_m)\begin{pmatrix} \operatorname{grad} g_1(y_1,\dots,y_m) \\ \dots \\ \operatorname{grad} g_m(y_1,\dots,y_m)\end{pmatrix}$$

Теорема 2.50. *Градиент перпендикулярен к касательной плоскости к поверхности (графику) функции $y = f(x_1,\dots,x_n)$ в каждой его точке. Направление этого вектора указывает направление наибольшего роста значения функции.*

Понятие локального экстремума повторяет определение 2.31. Именно,

Определение. Предположим, что функция f определена в окрестности точки $a \in \mathbb{R}^n$. Точка a называется точкой *локального максимума (минимума)*, если в $\mathbb{R}^n$ существует такая окрестность $U_\varepsilon(a)$ точки a, что $f(x) \leqslant f(x)$ (соответственно, $f(x) \geqslant f(x)$) для всех $x \in U_\varepsilon(a)$.

Теорема 2.51. *Пусть функция f от n аргументов определена в окрестности точки $a \in \mathbb{R}^n$. Если в a имеется локальный экстремум (локальный минимум или максимум), то* $\operatorname{grad} f(a) = 0$. *Предположим, что f имеет непрерывные вторые частные производные. Рассмотрим симметричную матрицу из вторых производных*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dots\dots\dots\dots & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\end{pmatrix},$$

в которой на месте (i,j) стоит $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$. Обозначим через D_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, определитель

$$D_k = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k} \\ \dots\dots\dots\dots & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}\end{vmatrix}.$$

Если в точке a все частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0,$$

и D_1, D_2, $\dots, D_n > 0$, то в точке a имеется локальный минимум.

Если в точке a все частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0,$$

и последовательность чисел $1, D_1, D_2, \ldots, D_n$ *отлична от нуля и имеет чередующиеся знаки, то в точке a имеется локальный максимум. Во всех остальных случаях, если* $D_1, D_2, \ldots, D_n \neq 0$, *в точке a нет экстремума.*

В частности, пусть $n = 2$ *и все частные производные*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = 0.$$

Если в точке a

$$D_2 = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right]\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right] - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right]^2 > 0,$$

то в точке a имеется локальный экстремум. При этом, если $D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} < 0$, *то в a имеется локальный максимума. Если* $D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} > 0$, *то в a имеется локальный минимума. Если же* $D_2 \leqslant 0$, *то в точке a нет экстремума.*

Разберем пример. Пусть $f = x^3 - y^3 + 3xy$. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -3y^2 + 3x = 0.$$

Заметим, что

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y} = 3.$$

Поэтому $D = -36xy - 9$. Решая систему

$$3x^2 = -3y, \quad 3x = 3y^2,$$

получаем либо $x = y = 0$, либо $x = 1$, $y = -1$. Тогда либо $D = 9$, либо $D = 36 - 9 > 0$. Итак, в точке $x = 1$, $y = -1$ имеется локальный минимум.

4.1. Метод Лагранжа. Рассмотрим теперь задачу *нелинейного программирования* или *задачу на условный экстремум.* Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ – открытая область и f_i, $i = 0, \ldots, m$, – непрерывно дифференцируемые функции в области U . При наличии *ограничений типа неравенств* и *равенств* рассмотрим экстремальную задачу

$$f_0(x) \longrightarrow \max(\min), \quad x \in U, \tag{37}$$

$$f_i(x) \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m' \leqslant m; \tag{38}$$

$$f_i(x) = 0, \quad i = m' + 1, \ldots, m. \tag{39}$$

В соответствии с общим принципом Лагранжа введем дополнительные переменные λ_0, и $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ (множители Лагранжа) и сведем задачу (37), (38), (39) к задаче на безусловный экстремум для функции Лагранжа

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \lambda_0) = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k f_x(x) = \lambda_0 f_0(x) + \cdots + \lambda_m f_m(x).$$

Теорема 2.52 (Правило множителей Лагранжа). *Пусть в точке $\hat{x} \in U$ достигается локальный экстремум задачи* (37), (38), (39). *Тогда найдутся (не равные одновременно нулю) множители Лагранжа $\hat{\lambda}_0$, $\hat{\lambda}$, для которых выполняются следующие условия.*

1. *Условие стационарности функции Лагранжа по x:*

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{\lambda}_0)}{\partial x_k} = 0, \quad k = 1, \ldots, n;$$

2. *Условие согласования знаков:*
   - **a.** $\hat{\lambda}_i \geqslant 0$, *при* $i = 1, \ldots, m'$ *(неотрицательность множителей Лагранжа соответствующих ограничениям* (38) *типа неравенство);*
   - **b.** *если задача на минимум, то* $\hat{\lambda}_0 \geqslant 0$*;*
   - **c.** *если задача на максимум, то* $\hat{\lambda}_0 \leqslant 0$.

3. *Условия дополняющей нежесткости*

$$\hat{\lambda}_i f(\hat{x}) = 0, \quad i = 1, \ldots, m'$$

(для ограничений (38) *типа неравенство).*

Так как множители Лагранжа определены с точностью до умножения на положительную константу, то достаточно рассмотреть два случая:

1. $\hat{\lambda}_0 = 0$ или $\hat{\lambda}_0 = 1$ для задачи на min,
2. $\hat{\lambda}_0 = -1$ или $\hat{\lambda}_0 = 0$ для задачи на max.

Таким образом, для определения $\hat{x}$, $\hat{\lambda}$, $\hat{\lambda}_0$ получаем систему из $n+m$ (вообще говоря, нелинейных) уравнений

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{m} \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} = 0 & i = 1, \ldots, n; \\ \lambda_j f_j(x) = 0, & j = 1, \ldots, m'; \\ f_j(x) \leqslant 0, & j = 1, \ldots, m'; \\ f_j(x) = 0, & j = m'+1, \ldots, m; \\ \lambda_k \geqslant 0, & k = 1, \ldots, m'; \\ \lambda_0 = 0 \text{ или } \lambda_0 = 1, & \text{для задачи на } \min \\ \lambda_0 = 0 \text{ или } \lambda_0 = -1 & \text{для задачи на } \max. \end{cases} \tag{40}$$

с $n+m+1$ неизвестными. Если ограничения задаются только уравнениями (39), либо неравенства (38) имеют вид $x_1, \ldots, x_n \geqslant 0$, то нужно рассмотреть лишь два случая $\lambda_0 = 1$ и $\lambda_0 = 0$.

Пример 2.53. Рассмотрим экстремальную задачу
$$f_0(x,y) = e^{x-y} - x - y \to \min, \quad x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x+y. \leqslant 1$$
Перепишем задачу в виде
$$\begin{aligned} &f_0(x,y) = (e^{x-y} - x - y) \to \min,\\ &f_1(x,y) = -x \leqslant 0,\\ &f_2(x,y) = -y \leqslant 0,\\ &f_3(x,y) = x+y-1 \leqslant 0. \end{aligned}$$
Составим функцию Лагранжа
$$\mathcal{L}(x,y,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_0) = \lambda_0\left(e^{x-y} - x - y\right) - \lambda_1 x - \lambda_2 y + \lambda_3(x+y-1).$$
Согласно правилу множителей Лагранжа необходимо решить систему
$$\begin{cases} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = \lambda_0(e^{x-y} - 1) - \lambda_1 + \lambda_3 = 0,\\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y} = \lambda_0(-e^{x-y} - 1) - \lambda_2 + \lambda_3 = 0,\\ \lambda_1 x = \lambda_2 y = \lambda_3(x+y-1) = 0,\\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \geqslant 0,\\ \lambda_0 = 0,\ 1. \end{cases}$$
Если $\lambda_0 = 0$, то из первых двух уравнений получаем, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \neq 0$ (так как все λ_i не могут одновременно равняться 0). Но тогда $x = y = 0$ и $x + y - 1 = 0$, что невозможно.

Таким образом, $\lambda_0 = 1$. Складывая первые два уравнения получим $2\lambda_3 - 2 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$ или $\lambda_3 = 1 + 0,5(\lambda_1 + \lambda_2) > 0$, что влечет $x + y = 1$. Рассмотрим следующие случаи:

A. $x > 0$, $y > 0$. Тогда $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ и $\lambda_3 = 1$. Подставляя в первое уравнение получаем $e^{x-y} - 1 + 1 = 0$. Противоречие.

B. $x = 1$, $y = 0$. Тогда $\lambda_1 = 0$ и из второго уравнения получаем
$$(-e-1) - \lambda_2 + \lambda_3 = (-e-1) - \lambda_2 + 1 + \frac{\lambda_2}{2} = -e - \frac{\lambda_2}{2} = 0. \Rightarrow \lambda_2 < 0$$
Противоречие.

C. $x = 0$, $y = 1$. Тогда $\lambda_2 = 0$. Из второго уравнения получаем $\lambda_3 = 1 + e^{-1}$, откуда $\lambda_1 = 2e^{-1}$.

Таким образом решением системы будет $\hat{x} = 0$, $\hat{y} = 1$, $\hat{\lambda}_0 = 1$, $\hat{\lambda}_1 = 2e^{-1}$, $\hat{\lambda}_2 = 0$, $\hat{\lambda}_3 = 1 + e^{-1}$.

Предложение 2.54. *Пусть ограничения* (38), *если они существуют, состоят только из неравенства* $x_1, \ldots, x_n \geqslant 0$. *Предположим также, что ограничения* (39) *состоят из одного уравнения* $g(x_1, \ldots, x_n) = 0$, *причем* $\operatorname{grad} g = 0$ *влечет* $\operatorname{grad} f = 0$, *где* $f = f_0$. *Тогда в теореме 2.52 можно считать, что* $\lambda_0 = 1$.

Применим это предложение для вычислений условного экстремума.

Пример 2.55. Решим следующую задачу

$$
\begin{aligned}
f(x,y) = x^2 + 2y^2 \to \max \\
x - y = 1.
\end{aligned}
$$

В силу предложения 2.54 имеем

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = -(x^2+2y^2) + \lambda(x-y-1).$$

В этом случае

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = -2x + \lambda = 0, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y} = -4y - \lambda = 0, \quad x - y - 1 = 0.$$

Отсюда $2x = \lambda = -4y$, т. е. $x = -2y$ и поэтому $0 = -2y - y - 1 = -3y - 1$. Следовательно, $y = -\frac{1}{3}$, $x = \frac{2}{3}$. В этой точке $\operatorname{grad} f = (2x, -4y) = (\frac{4}{3}, \frac{4}{3}) \neq 0$. Заметим, что f неограниченно возрастает с ростом x, y. Поэтому в точке $x = \frac{2}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$ имеется (локальный) минимум.

Рассмотрим некоторые дополнительные достаточные условия наличия max или min в методе Лагранжа.

Теорема 2.56. *Найдем экстремум функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ при ограничениях $g_1(x_1,\ldots,x_n) = c_1, \ldots\ g_m(x_1,\ldots,x_n) = c_m$, причем $m < n$. Тогда*

$$\mathcal{L} = f(x_1,\ldots,x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left[c_j - g_j(x_1,\ldots,x_n)\right].$$

Составим гессениан $\det H$, *где*

$$H = \begin{pmatrix}
0 & \ldots & 0 & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & \ldots & 0 & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \\
\frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x_1^2} & \ldots & \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x_1\partial x_n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\frac{\partial g_1}{\partial x_n} & \ldots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} & \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x_n\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial x_n^2}
\end{pmatrix}.$$

Обозначим через H_j главный j-ый минор матрицы H. В найденной точке достигается максимум, если в ряду

$$\det H_{2m+1}, \ \ldots, \ \det H_{n+m} = \det H \tag{41}$$

знаки чередуются, причем знак первого минора равен $(-1)^{m+1}$. Если все миноры из (41) постоянны и равны $(-1)^m$, то этой точке минимум.

Пример 2.57. Проверим на минимум точку

$$(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$$

из примера (2.55), именно,

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 \to \max$$
$$x - y = 1.$$

Имеем $m = 1$ и $g_1 = x - y = 1$ и

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = (x^2 + 2y^2) + \lambda(1 - x + y).$$

В этом случае

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

При этом

$$\det H_3 = \det H = -6.$$

Следовательно, в точке $(\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3})$ имеется минимум.

4.2. Теорема о неявной функции. Пусть задана непрерывно дифференцируемая функция $u(x_1,\dots,x_n)$. Если C – некоторое число, то *линией уровня (безразличия)* называется множество всех таких точек $y \in \mathbb{R}^n$, что $u(y) = C$.

Теорема 2.58 (Теорема о неявной функции). *Предположим, что функция $u(x_1,\dots,x_n)$ непрерывно дифференцируема в окрестности точки $x^0 \in \mathbb{R}^n$ и $u(x^0) = C$. Предположим, что $\frac{\partial u}{\partial x_i}(x^0) \neq 0$ для некоторого $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда существует такая окрестность U точки x^0 и непрерывно дифференцируемая функция*

$$f(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n),$$

что для всех $x = (x_1,\dots,x_n) \in U$

$$u(x_1,\dots,x_n) = C \iff x_i = f(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n).$$

При этом

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x_j}}{\frac{\partial u}{\partial x_i}}, \quad j \neq i. \tag{42}$$

Кроме того, если существуют вторые производные, то

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i}}{\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2}, \quad k, j \neq i. \tag{43}$$

Равенство (43) вытекает из (42) после вычисления частной производной $\frac{\partial}{\partial x_k}$ с использованием правила дифференцирования дробей. Равенство (42) получается следующим образом. В окрестности точки x^0 имеется равенство

$$u(x_1,\dots,x_{i-1},f(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n),x_{i+1},\dots,x_n) = C.$$

Дифференцируя это равенство по x_j, $j \neq i$, в силу теоремы 2.49 получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0.$$

Отсюда вытекает (42).

4.3. Производственные функции. В микроэкономике важными примерами функций являются функции *полезности*

$$u(x_1, \ldots, x_n)$$

для потребителя, где x_i – количество i-ого товара, приобретаемого потребителем на рынке. Эта функция обладает следующими свойствами.

1. Монотонность по каждой переменной x_i.
2. Предельная полезность i-го товара, т. е. $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, уменьшается с ростом x_i.
3. Предельная полезность i-го товара, т. е. $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, увеличивается с ростом x_j при $j \neq i$.

Теми же свойствами обладает производственная функция

$$f(x_1, \ldots, x_n),$$

характеризующая, например, объем выпуск продукции в зависимости от затрат. Она обладает перечисленными свойствами 1) – 3) и свойством

- $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$, если $x_i = 0$ для некоторого $1 \leqslant i \leqslant n$.

Свойства функции полезности и производственные функции можно записать в следующем виде. Предельная полезность i-го блага равна частной производной $\frac{\partial u}{\partial x_i}$. Поэтому

1. $\frac{\partial u}{\partial x_i} \geqslant 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$
2. $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \leqslant 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$
3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \geqslant 0, \quad 1 \leqslant i \neq j \leqslant n.$

Рассмотрим при $n = 2$ линию уровня (безразличия) функции полезности (производственной функции) $u(x, y) = C$. Пусть $\frac{\partial u}{\partial y} \neq 0$. Тогда по теореме 2.58 этот график совпадает с графиком функции $y = f(x)$, причем

$$\frac{df}{dx} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} < 0, \quad \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}}{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} \geqslant 0.$$

Таким образом, график $y = f(x)$ убывает, но является выпуклым вниз, т. е. он имеет вид

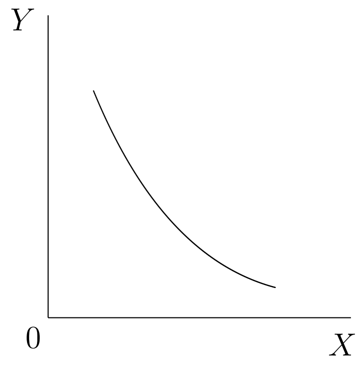


Рис. 2.10

4.3.1. **Решение задачи потребительского выбора.** Предположим, что задана функции полезности $u(x_1, \dots, x_n)$ с изложенными выше свойствами, причем

$$p_1x_1 + \dots + p_nx_n \leqslant I, \quad x_1, \dots, x_n \geqslant 0,$$

и $\operatorname{grad} u \neq 0$. Здесь x_i, количество приобретаемого i-го товара, $p_i > 0$ – цена единицы этого товара, I – общая сумма денег, отпущенного на покупку.

Из предположения $\operatorname{grad} u \neq 0$ и условия 1) вытекает, что функция u растет с ростом каждого x_i. Поэтому нужно предполагать, что $p_1x_1 + \dots + p_nx_n = I$. Кроме того, считается, что $\operatorname{grad} u \neq 0$. Таким образом, нужно решить задачу

$$\begin{aligned} &u(x_1, \dots, x_n) \to \max \\ &p_1x_1 + \dots + p_nx_n - I = 0, \\ &-x_1, \dots, -x_n \leqslant 0. \end{aligned} \tag{44}$$

По методу Лагранжа в силу предложения 2.54 составим функцию

$$\mathcal{L} = -u + \lambda(p_1x_1 + \dots + p_nx_n - I) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i,$$

и напишем уравнения

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = -\frac{\partial u}{\partial x_i} + \lambda p_i - \lambda_i = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n; \\ &\lambda_1 x_1 = \dots = \lambda_n x_n = 0, \\ &p_1x_1 + \dots + p_nx_n - I = 0, \\ &x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geqslant 0; \end{aligned} \tag{45}$$

Если $\lambda_i \neq 0$, то $x_i = 0$ и мы можем уменьшить число неизвестных. Предположим, что $x_i \neq 0$ и $\lambda_i = 0$ для всех i. Тогда

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = \lambda(p_1, \dots, p_n) \tag{46}$$

для любых $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Таким образом, справедливо

Предложение 2.59. *Точка решения задачи* (44) *с положительными координатами расположена на плоскости, задаваемая уравнением $p_1x_1 + \dots + p_nx_n - I = 0$. В этой точке линия уровня функции u касается указанной плоскости.*

Рассмотрим частный случай $n = 2$. Тогда уровень (*линия безразличия* $u(x, y) = C$) функции полезности $u(x, y)$ имеет вид, указанный в Рис. 2.11.

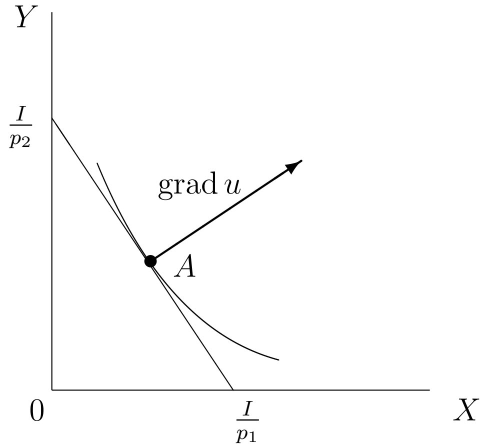


Рис. 2.11

Проведем в Рис. 2.11 отрезок прямой $p_1x+p_2y-I = 0$, где $x, y \geqslant 0$. Он пересекает OX в точке $\frac{I}{p_1}$, а ось OY в точке $\frac{I}{p_2}$. Для того, чтобы значение u было бы максимальным необходимо в силу (45), чтобы отрезок касался линии безразличия $u(x, y) = C$, поскольку прямая задается уравнением

$$y = -\frac{p_1}{p_2}x + \frac{I}{p_2},$$

и по (46) градиент $\operatorname{grad} u$ перпендикулярен этой прямой.

Пример 4. Пусть

$$u(x, y) = y - (x + \tfrac{1}{2})^{-1} + 6 \to \max,$$
$$x + y \leqslant 10, \quad x, y \geqslant 0.$$

Имеем

$$\tfrac{\partial u}{\partial x} = (x + \tfrac{1}{2})^{-2} > 0, \quad \tfrac{\partial u}{\partial y} = 1 > 0, \quad \tfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2(x + \tfrac{1}{2})^{-3} < 0,$$
$$\tfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \tfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0,$$

т. е. выполнены свойства функции полезности. Решаем методом Лагранжа. Имеем

$$\mathcal{L} = -y + (x + \frac{1}{2})^{-2} + 6 + \lambda(x + y - 10),$$

откуда

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -(x+\frac{1}{2})^{-2} + \lambda = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -1 + \lambda = 0, \quad x + y - 10 = 0.$$

Отсюда $\lambda = 1$, $(x+\frac{1}{2})^{-2} = 1$ и поэтому $x = \frac{1}{2}$, откуда $y = 10-x = 9\frac{1}{2}$.

4.3.2. **Долговременное планирование производства.** Рассмотрим ситуацию, когда фирма производит продукт и при этом потребляет n видов сырья количестве $x_1, \ldots, x_n$. Объем производства задается производственной функцией $f(x_1, \ldots, x_n)$. Производимый продукт продается по постоянной цене p_0, причем стоимость единицы i-го сырья равна p_i. Тогда прибыль фирмы составит

$$\mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n) = p_0 f(x_1, \ldots, x_n) - (p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n).$$

Долговременность означает, что у нас нет ограничения по всем видам сырья. Таким образом, ставится задача

$$\mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n) \to \max, \quad x_1, \ldots, x_n > 0.$$

Тогда для решения этой задачи достаточно приравнять нулю

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = p_0 \frac{\partial f}{\partial x_i} - p_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Если в точке $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ имеется экстремум, то

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{p_i}{p_0}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{47}$$

Таким образом, в точке $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ имеем

$$\operatorname{grad} f(x^0) = \left(\frac{p_1}{p_0}, \ldots, \frac{p_n}{p_0} \right). \tag{48}$$

Используя свойства производственных функций

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} > 0,$$

получаем, что справедлива

Теорема 2.60. *Точка $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ находится однозначно и в точке x^0 имеется максимум. При этом выполняются уравнения* (47).

Заметим, что вектор $p = (p_1, \ldots, p_n) > 0$ перпендикулярен к любой гиперплоскости $p_1 x_1 + \cdots + p_n x_x - C = 0$ для любого C. Поэтому из (48) как и в предложениии 2.59 вытекает, что в точке x^0 гиперплоскость $p_1 x_1 + \cdots + p_n x_x - C = 0$ является касательной к линии уровня $f(x_1, \ldots, x_n) = \dfrac{C}{p_0}$, см. Рис. 2.11 в случае $n = 2$.

Решая систему уравнений (47) относительно x^0 получаем, что $x_i^0 = x_i^0(p_0, p_1, \ldots, p_n)$. Подставляя в $f(x_1, \ldots, x_n)$ функцию

$$\mathcal{F} = f\left(x_1^0(p_0, \ldots, p_n), \ldots, x_n^0(p_0, \ldots, p_n)\right)$$

предложения выпуска.

Множество всех точек $x_i^0 = x_i^0(p_0, p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ образуют кривую *долговременного развития фирмы.*

4.3.3. **Другие задачи оптимизации.** Кроме рассмотренной выше задачи максимизации прибыли можно также рассматривать задачу минимизации затрат при заданном объеме M выпуска продукции. Эта задача имеет вид

$$\begin{aligned} &p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n \to \min \\ &f(x_1, \ldots, x_n) = M, \\ &x_1, \ldots, x_n \geqslant 0. \end{aligned}$$

Можно рассматривать задачу максимизации объема производства при ограничениях на затраты. Эта задача имеет вид

$$\begin{aligned} &f(x_1, \ldots, x_n) \to \max \\ &p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n \leqslant C, \\ &x_1, \ldots, x_n \geqslant 0. \end{aligned}$$

Далее можно решать задачу максимизации прибыли при наличии некоторых ограничений на сырье (кратковременное планирование). Эта задача имеет вид

$$\begin{aligned} &f(x_1, \ldots, x_n) - (p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n) \to \max \\ &g_j(x_1, \ldots, x_n) \leqslant C_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \\ &x_1, \ldots, x_n > 0. \end{aligned}$$

4.4. Элементы выпуклого программирования. Рассмотрим задачу нелинейного программирования

$$\begin{cases} f(x) \to \max, \\ g_1(x) \leqslant r_1, \\ \ldots \\ g_m(x) \leqslant r_m, \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и $f, g_1, \ldots, g_m$ — дифференцируемые функции от n неизвестных $x_1, \ldots, x_n$.

При применении метода Лагранжа рассматривается функция

$$\mathcal{L} = f(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left[r_j - g_j(x) \right].$$

Возникают условия Куна-Такера

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \leqslant 0, \quad x_i \geqslant 0, \quad x_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n; \\ &\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_j} \geqslant 0, \quad \lambda_j \geqslant 0, \quad \lambda_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_j} = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant m. \end{aligned} \tag{49}$$

которые выполняются при всех индексах i, j. Находятся все точки $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*) \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющие условиям (49).

Теорема 2.61 ([**20**], [**9**]). *Предположим, что в первом октанте функция f дифференцируема и выпукла вниз (т.е. множество точек*

$$(x, z) \in \mathbb{R}^{n+1}, \qquad z \geqslant f(x),\ x \geqslant 0,$$

выпукло, и каждая функция g_j дифференцируема и выпукла вверх, т.е. множество

$$(x, z) \in \mathbb{R}^{n+1}, \qquad z \leqslant g_j(x),\ x \geqslant 0,$$

выпукло. Тогда точка x^* является точкой глобального максимума для функции f.

4.5. Дифференциальные уравнения. Предположим, что в некоторой открытой области $X \subset \mathbb{R}^2$ задана непрерывно дифференцируемая функция $f(x, y)$ и $(x_0, y_0) \in X$, причем $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) существует и единственна такая функция $y = y(x)$, что $y' = f(x, y)$ и $y(x_0) = y_0$.

Отметим ряд важных примеров дифференциальных уравнений и способов их решения. Дифференциальное уравнение с *разделяющимися переменными* имеет вид $y' = h(y)g(x)$. Перепишем его в виде

$$\frac{dy}{dx} = h(y)g(x),$$

и затем в виде

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)\,dx.$$

Отсюда

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)\,dx.$$

Это позволяет найти y как функцию от x.

Например, если $y' = \lambda y$, то получаем

$$\ln y + C = \int \frac{dy}{y} = \int \lambda\,dx = \lambda x.$$

Поэтому $y = A\exp(\lambda x)$. При этом $A = y(0)$.

4.5.1. **Модель До́мара-Харрода.** Дифференциальные уравнений возникают при рассмотрении модели До́мара-Харрода в макроэкономике. Доход $Y(t) = C(t) + I(t)$ рассматривается как сумма потребления $C(t)$ и инвестиций $I(t)$. При этом

- экономика считается закрытой, в частности, экспорт равен нулю и нет государственных инвестиций и нет выбытия капитала;
- инвестиции мгновенно переходят в прирост капитала;

- скорость роста дохода пропорциональна инвестициям, т. е.

$$I(t) = B\frac{dY}{dt};$$

- затраты труда постоянны во времени или выпуск не зависит от затрат труда, поскольку труд не является дефицитным ресурсом;
- модель не учитывает технического прогресса.

Итак, поведение модели описывается дифференциальным уравнением

$$Y(t) = C(t) + B\frac{dY}{dt}.$$

Если найти частное решение $Y_0(t)$, то общее решение имеет вид $Y(t) = Y_0(t) + Z(t)$, где $Z(t)$ – решение дифференциального уравнения

$$Z(t) = B\frac{dZ}{dt}. \tag{50}$$

Как отмечено выше,

$$Z(t) = Z(0)\exp\frac{t}{B}. \tag{51}$$

Таким образом, $Y(t) = Y_0(t) + Z(0)\exp\dfrac{t}{B}$. В частности, если $C(t) = 0$, то $Y(t) = Y(0)\exp\dfrac{t}{B}$.

Предположим, что $C(t) = C \neq 0$. Тогда в качестве частного решения можно взять постоянную C. Поэтому имеем $Y(t) = C + M\exp\dfrac{t}{B}$, причем $Y(0) = C + M$, где $M = I(0)$.

Если взять $C(t) = C\exp(rt)$, то частное решение имеет вид

$$Y_0(t) = \frac{C\exp(rt)}{1 - Br}.$$

Отсюда по (50), (51)

$$Y(t) = Z(0)\exp\frac{t}{B} + \frac{C\exp(rt)}{1 - Br}$$

причем $Y(0) = Z(0) + \frac{C}{1-Br}$. Поэтому

$$Z(0) = Y(0) - \frac{C}{1 - Br},$$

Откуда

$$Y(t) = \left[Y(0) - \frac{C}{1 - Br}\right]\exp\frac{t}{B} + \frac{C\exp(rt)}{1 - Br}.$$

Анализ этой функции помогает увидеть зависимость между инвестициями и потреблением.

4.6. Упражнения.

1. Найти частные производные и эластичность по каждой переменной следующих функций:

a) $f = x^2 - 2xy + 2y^2$;

b) $f = ye^{xz} + \ln(x^2 - 2y + z)$.

2. Найти вторые производные:

a) $f = \dfrac{x^2}{1+2y}$;

b) $f = xe^y$;

c) $f = \ln(x + e^y)$;

d) $f = x^{2y}$;

e) $f = e^x(\sin y + x\cos y)$.

3. Найти градиент функции:

a) $f = 4 - x^2 - y^2$ в точке $(1, 2)$;

b) $f = (x - y)^2$ в точке $(0, 3)$;

c) $f = x^2 + y^2 - z^2$ в точке $(1, -1, 2)$;

d) $f = xyz$ в точке $(3, -1, 2)$.

4. Найти экстремумы функций:

a) $f = x^2 + xy + 2y^2 - 4x - 5y$;

b) $f = xy(1 - x - y)$;

c) $f = x^3 - y^3 - 3xy$;

d) $f = 3x + 6y - x^2 - xy + y^2$;

e) $f = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$;

f) $f = 2xy - 4x - 2y$;

g) $f = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$.

5. Цена на два вида товаров равна, соответственно, $p_1 = 32$ и $p_2 = 24$. Определить при каких количествах x, y продаж этих товаров прибыль будет максимальной, если функция издержек $C = \dfrac{3}{2}x^2 + 2xy + y^2$.

6. Найти предельные показатели объема производства Q при изменении одного из факторов – капитала K, величины трудовых ресурсов L, если $Q = aK^\alpha L^{1-\alpha}$, где $0 < \alpha < 1$.

7. Пусть фирма производит два вида товаров в количествах x и y и $p_1 = 8,\ p_2 = 10$ – цена единиц этих товаров. Предположим, что при этом функция затрат имеет вид $C = x^2 + xy + y^2$. Найти максимум прибыли и выяснить при каких количествах товаров он возникает.

8. Пусть функция затрат на два вида ресурсов имеет вид $u = p_1x + p_2y$, где x, y – количества этих ресурсов. При этом количество выпускаемой продукции имеет вид $u = axy^2$. Найти оптимальной распределение ресурсов при затратах на сумму A и при выпуске в количестве C.

9. Будут ли следующие функции производственными или функциями полезности:

a) $u(x,y) = y\left[-(x+\frac{1}{9})^{-2} + 81\right]$;

b) $u(x,y,z) = (y^2+2y)z\left[(x+27)^{\frac{1}{3}} - 3\right]$;

c) $u(x,y) = \left(\sqrt[4]{x+1} - 1\right)\sqrt[4]{y^3+4y}$;

d) $u(x,y,z) = \ln(x+y+z+1)\left(\sqrt{x+2} - \sqrt{2}\right)$?

10. Решить задачу потребительского выбора, если функция полезности имеет вид

$$u(x,y) = \ln(y+1) + \ln(x+2),$$

и $2x + 3y \leqslant 5,\ x, y \geqslant 0$.

11. Решить задачу потребительского выбора, если функция полезности имеет вид

$$u(x,y) = \ln(3y+1) + \ln(4x+5),$$

и $3x + y \leqslant 4,\ x, y \geqslant 0$.

12. Решить задачу потребительского выбора, если функция полезности имеет вид, предложенный Р. Стоуном,

$$u(x,y) = (x-4)^3(y-2)^2,$$

и $4x + 3y \leqslant 25,\ x \geqslant 4,\ y \geqslant 2$.

13. Найти максимум и минимум значений функции $u(x,y) = xy$ при условии $10x + 2y \leqslant 15,\ x, y \geqslant 1$.

14. Решить задачу потребительского выбора, если функция полезности имеет вид $u(x,y) = (x-1)^{\frac{1}{2}}(y-1)^{\frac{2}{3}}$, и $10x+2y \leqslant 60,\ x, y \geqslant 1$.

15. Решить задачу потребительского выбора, если функция полезности имеет вид $u(x,y) = \sqrt[4]{(x-1)(y-1)^3}$, и

$$10x + 2y \leqslant 60, \quad x, y \geqslant 1.$$

16. Решить задачу потребительского выбора, если функция полезности имеет вид $u(x,y) = 5(4-x)^2(20-y)^2$, и $10x+2y \leqslant 60,\ x,y \geqslant 0$.

17. Решить дифференциальное уравнение:

a. $x^2y' - y = 0$ и $y(2) = 4$.

b. $y' = y\cos x - 2xy$;

c. $y' = \frac{x}{y} + \frac{1}{xy}$;

d. $y' = -ye^x$;

e. $y' = y\frac{2-x}{x+3} - 5y\cos x$.

Глава 3

Элементы теории вероятностей

1. Введение в теорию вероятностей

1.1. Основные понятия. Вероятность является числовой характеристикою степени возможности появления события в тех или иных условиях, повторяющихся неограниченное число раз. Она характеризует отношение числа благоприятных событий к общему числу исходов.

Пример 3.1. В ящике находится 10 белых и 5 черных шаров. Из ящика наугад берут 6 шаров. Какова вероятность того. что из них 4 будут белыми, а 2 черными. Общее число исходов $\binom{15}{6}$, из них благоприятных – $\binom{10}{4}\binom{5}{2}$. Здесь

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(n-m)!}.$$

Таким образом, искомая вероятность равна

$$P = \frac{\binom{10}{4}\binom{5}{2}}{\binom{15}{6}} = \frac{10! \cdot 5! \cdot 6! \cdot 9!}{4! \cdot 6! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 15!} = \frac{10! \cdot 9!}{4! \cdot 2! \cdot 3!}.$$

Пусть $\Omega = \{\omega_1, \, \ldots, \, \omega_N\}$ – число элементарных событий. В предыдущим примере ω_i – это выбор шара с номером i, где $1 \leqslant i \leqslant 15$. С каждым ω_i связывается вероятность его появления $p_i = p(\omega_i)$. Тогда

$$p_1 + \cdots + p_n = 1, \quad 0 \leqslant p_i \leqslant 1.$$

Событием называется подмножество A в Ω. Вероятность его появления

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega).$$

В примере событием является выбор 4 белых и двух черных шаров.

Если A, B – события, то их *сумма* $A + B = A \cup B$. Это означает, что выполняется либо A, либо B. *Произведением* событий A, B является их пересечение $A \cap B$ т. е. их совместное выполнение. События A, B *несовместимы*, если $p(AB) = 0$.

Теорема 3.2. *Если события $A_1, \ldots, A_n$ попарно несовместимы, то*

$$p(A_1 + \cdots + A_n) = p(A_1) + \cdots + p(A_n).$$

В общем случае $P(A+B) + P(AB) = p(A) + P(B)$.

Условная вероятность $P_A(B)$ – это вероятность наступления события B при условии, что выполнено A. Она равна

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Пример 3.3. В урне 4 белых шара, 5 красных и 6 черных. Выбираются по одному шару без возврата назад в ящик. Найти вероятность того, что первый раз появится белый шар (событие A), далее красный (событие B) а затем черный (событие C).

Имеем $P(A) = \dfrac{4}{4+5+6} = \dfrac{4}{15}$. Далее $P_A(B) = \dfrac{5}{14}$ и $P_{AB}(C) = \dfrac{6}{13}$. Искомая вероятность

$$P(ABC) = P(A)P_A(B)P_{AB}(C) = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{15 \cdot 14 \cdot 13} = \frac{4}{7 \cdot 13}.$$

Событие B *независимо* от события A, если

$$P_A(B) = P(B), \text{ т . е. } P(AB) = P(A)P(B).$$

Пример 3.4. Решим следующую задачу. Нужно найти вероятность поражения цели при совместной стрельбе из двух орудий, если вероятность поражения орудиями равна 0,8 и 0,7. Так как события независимы, то $P(AB) = P(A)P(B) = 0,8 \cdot 0,7 = 0,56$. Отсюда

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,8 + 0,7 - 0,56 = 0,94.$$

Теорема 3.5. *Если события $A_1, \ldots, A_n$ независимы, то*

$$P(A_1 \cdots A_n) = P(A_1) \cdots P(A_n),$$
$$P(A_1 + \cdots + A_n) = 1 - (1 - P(A_1)) \cdots (1 - P(A_n)).$$

События $A_1, \ldots, A_n$ образуют *полную группу* или являются *гипотезами*, если они попарно несовместимы и

$$p(A_1 + \cdots + A_n) = P(A_1) + \cdots + P(A_n) = 1.$$

Теорема 3.6 (Формула Байеса). *Пусть $B_1, \ldots, B_n$ – полная группа событий (гипотез) Тогда для любого события A получаем*

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(A)}, \quad P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P_{B_i}(A).$$

Пример 3.7. Вероятность производства изделия с браком равна 0,09. В результате проверки партии изделий без брака признаются изделия с вероятностью 0,96, а с браком – с вероятностью 0,4. Найти долю изделий прошедших контроль, а также вероятность того, что прошедшее контроль изделие будет без брака.

Гипотезы B_1 – изделие без брака и B_2 – с браком. Пусть событие A означает, что изделие без брака прошло контроль. Тогда

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) \\ &= (1-0,09)0,96 + 0,09 \cdot 0,04 \\ &= 0,8736 + 0,036 = 0,909 \end{aligned}$$

Вторая вероятность вычисляется по формуле Байеса

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{(1-0,09)\cdot 0,96}{0,909} = 0,9610561.$$

1.2. Случайные величины. *Случайной величиной* называется функция на пространстве элементарных событий Ω. *Функция распределения* для случайной величины ξ имеет вид

$$P(z) = P(\xi < z) = P\{x \mid \xi(x) \leqslant z\}.$$

Другими словами, $P(z)$ – это вероятность того, что функция ξ принимает значение, не превышающее z. *Плотность распределения* для случайной величины ξ имеет вид $p(z) = P'(z)$. Она определяется для дифференцируемой функции на бесконечном пространстве Ω.

Теорема 3.8 (Локальная теорема Лапласа). *Если вероятность p события A при каждом испытании постоянна (испытание Бернулли), то вероятность $P_n(k)$ того, что A появится в n испытаниях ровно k раз приблизительно равно*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}, \quad q = 1-p.$$

Теорема 3.9 (Интегральная теорема Лапласа). *Пусть вероятность появления события A при каждом испытании постоянна (испытание Бернулли). Вероятность того, что A появится в n испытаниях от l до m раз приблизительно равно*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx, \quad a = \frac{l-np}{\sqrt{npq}},\ b = \frac{m-pn}{\sqrt{npq}}, \quad q = 1-p.$$

1.3. Математическое ожидание, дисперсия. Пусть задана случайная величина ξ, принимающая на $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$ значения $x_1, \dots, x_N$. Зафиксируем значение x_i и рассмотрим подмножество

A_i всех таких $\omega \in \Omega$, что $\xi(\omega) = x_i$. Положим $P_i = P(A_i)$. *Математическим ожиданием* случайной величины ξ называется

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{N} x_i P_i.$$

В бесконечном случае

$$M(\xi) = \int_{\mathbb{R}} xp(x)dx,$$

где $p(x)$ – плотность распределения. Математическое ожидание характеризует среднее значение случайной функции ξ. *Дисперсией* $D(\xi)$ случайной величины ξ называется $M\left[(\xi - M(\xi))^2\right]$. Таким образом, в случае конечного множества Ω имеем

$$D(\xi) = \sum_{i=1}^{N} \left[x_i - M(\xi)\right]^2 P_i,$$

а в бесконечном случае

$$D(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \left[x - M(\xi)\right]^2 p(x)dx.$$

$\sigma = \sqrt{D(\xi)}$ характеризует среднее отклонение ξ от математического ожидания $M(\xi)$.

Случайные функции ξ, η *независимы*, если события $\{\xi(x) \leqslant k\}$ и $\{\eta(y) \leqslant l\}$ независимы при любых k, l. *Коэффициент корреляции* $r_{\xi,\eta}$ двух случайных величин ξ, η равен

$$r_{\xi,\eta} = \frac{M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta)}{\sqrt{D(\xi)D(\eta)}}.$$

Из этого определения видно, что $|r_{\xi,\eta}| \leqslant 1$. Коэффициент корреляции характеризует степень зависимости двух случайных величин.

Теорема 3.10. *Если $r_{\xi,\eta} \neq 0$, то ξ, η зависимы. Если ξ, η независимы, то $r_{\xi,\eta} = 0$. Если $r_{\xi,\eta} = \pm 1$, то $\xi = a\eta + b$ для некоторых чисел a, b.*

Нормальным распределением случайной величины ξ называется распределение с плотностью

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$$

при некоторых σ, a. Тогда $M(\xi) = a$, $D(\xi) = \sigma^2$.

Теорема 3.11 (Центральная предельная теорема). *Пусть*

$$\xi_1,\, \xi_2,\, \ldots$$

– попарно независимые случайные величины с одинаковой функцией распределения и

$$M_k = M(\xi_k), \quad \sigma_k^2 = D(\xi_k) > 0.$$

Тогда вероятность

$$\lim_{n\to\infty} P\left(y \leqslant \frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n - M(\xi_1 + \cdots + \xi_n)}{\sqrt{D(\xi_1 + \cdots + \xi_n)}} \leqslant x\right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_y^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt.$$

2. Введение в математическую статистику

Задачей математической статистики является сбор и обработка сведений, полученных в результате экспериментов или наблюдений. Например, из N изделий для контроля выбираются по некоторому принципу n изделий и производится их оценка. *Генеральная средняя* количественной функции ξ равна

$$x_g = \frac{x_1 + \cdots + x_N}{N},$$

а *средняя выборочная* равна

$$x_c = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

Это аналоги математических ожиданий. *Генеральной дисперсией* называется

$$D_g = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - x_g)^2}{N},$$

а *выборочная дисперсия*

$$D_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_c)^2}{n}.$$

Цель статистических исследований сравнить x_g, x_c а также D_g, D_c. Оценка называется *несмещенной*, если эти числа совпадают.

Статистической гипотезой называется предположение о распределении вероятностей на основании наблюдений. Она формулируется как предположение о принадлежности совместного распределения совокупности случайных величин к некоторому классу распределений. Проверка статистических гипотез состоит в проверке двух гипотез H_0 – основная гипотеза и H_1 – альтернативная гипотеза.

Пример 3.12. Рассмотрим решение следующей задачи. Вес изделия должен быть $a_0 = 0,6$г. Выборочная проверка 121 изделия показала, что средний вес равен 0,62г. При уровне значимости $\delta = 0,01$ проверить гипотезу $H_0 : (a = a_0 = 0,6)$, при альтернативной гипотезе $a > 0,6$. Известно, что вес изделия распределен нормально со средним отклонением $\sigma = 0,11$.

Имеем

$$U_{obs} = \frac{(\overline{x} - a)\sqrt{n}}{\sigma},$$

где $\overline{x} = 0,62$ – среднее значение (математическое ожидание функции веса), $n = 121$. Поэтому

$$U_{obs} = \frac{(0,62 - 0,6)11}{0,11} = \frac{0,02}{0,01} = 2.$$

Далее

$$\Phi(U_{crit}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{U_{crit}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = \frac{1-\delta}{2} = \frac{1 - 0,01}{2} = 0,495.$$

По таблице $U_{crit} = 2,58$. Если $|U_{obs}| < U_{crit}$, то гипотеза H_0 может иметь место. Если же $|U_{obs}| > U_{crit}$, то гипотезу H_0 нужно отвергнуть. В нашим случае $2 < 2,58$, и поэтому гипотезу можно принять.

В заключении рассмотрим вопрос о линейной *регрессии*. Пусть ξ, η – выборки зависимых случайных величин. Оказывается, что ξ можно представить в виде $\eta = b\xi + a + \varepsilon$, где $r_{\xi,\varepsilon} = 0$. Имеются выборки

$$\eta_1, \ldots, \eta_N, \quad \xi_1, \ldots, \xi_N,$$

случайных величин η, ξ со средними значениями

$$\overline{\eta} = \frac{\eta_1 + \cdots + \eta_N}{N}, \quad \overline{\xi} = \frac{\xi_1 + \cdots + \xi_N}{N}.$$

Нужно найти a, b, ε. Имеем

$$b = \frac{\sum_i \eta_i \xi_i - N\overline{\xi}\overline{\eta}}{\sum_i \xi_i^2 - N\overline{\xi}^2}, \quad a = \overline{\eta} - b\overline{\xi}.$$

Таким образом,

$$b = r_{\xi,\eta} \frac{\sqrt{D(\eta)}}{\sqrt{D(\xi)}}.$$

Литература

[1] В.А.Артамонов, Введение в высшую алгебру и аналитическую геометрию (Курс лекций для экономических специальностей). – М.: Дело 2012.

[2] В. А. Артамонов, В. Н. Латышев. Линейная алгебра и выпуклая геометрия. – М.; Изд-во "Факториал Пресс". 2004. – 160С.

[3] Васин А. А., Морозов В. В. Теория игр и модели математической экономики (учебное пособие) М.: МАКС ПРЕСС, 2005 г., 272С.

[4] Гмурман В.Е., Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике (любое издание).

[5] Демидович Б.П., Сборник задачи и упражнений по математическому анализу (любое изда-ние).

[6] Демидович Б.П., Кудрявцев В.А., Краткий курс высшей математики - М:Астель-АРТ, 2001.

[7] Общий курс высшей математики для экономистов. Под ред. В.И.Ермакова - М:ИНФРА-М, 2002.

[8] Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н., Математические методы в экономике - М:ДИС, 1997.

[9] Интрилигатор М., Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Айрис-Пресс, 2002.

[10] Колемаев В.А., Калинина В.Н., Теория вероятностей и математическая статистика. - М:ИНФРА-М, 2001.

[11] Колесников А.Н., Краткий курс математики для экономистов. - М:ИНФРА-М, 2001.

[12] Красс М.С. Математика для экономических специальностей. М:Дело, 2003.

[13] Красс М.С., Чупрынов Б.П., Основы математики и ее приложения в экономическом образо-вании. - М:Дело, 2001.

[14] Высшая математика для экономистов. Под ред. Н.Ш.Кремера - М:Юнити, 2002

[15] Малыхин В.И., Математика в экономике. - М:ИНФРА-М, 2002.

[16] Морозов В.В. Основы теория игр. М.: Изд. отдел ф-та ВМиК МГУ, МАКС пресс, 2002.

[17] Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Семина Е. А. Теория игр. – М.: Высш. шкл., Книжный дом "Университет 1998.

[18] Протасов И. А. Теория игр и исследование операций. – М.: Гелиос АРВ, 2003.

[19] Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В., Шандра И.Г., Математика в экономике - М:Финансы и статистика, 2001

[20] Chiang A.C., Fundamental methods of mathematical economics, McGraw-Hill International Editions, Economics Series, 1984, Singapore.